CORRENTI

CORRENTE RETTILINEA

Come abbiamo già visto, per le correnti rettilinee ho una distribuzione di pressione idrostatica lungo la corrente e lineare trasversalmente.

Nel caso di vene rettilinee ho infatti:

$$v_y = v_z = 0$$

$$v_x \neq 0$$

$$x> \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)$$

$$y> \quad \cancel{\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + v_y \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + v_z \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g\frac{\partial \hat{z}}{\partial y} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g\frac{\partial \hat{z}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

Il carico piezometrico in direzione trasversale alla corrente è costante e quindi la distribuzione di pressione è lineare.

Come detto sopra, per una corrente rettilinea posso trascurare le velocità v_y e v_z, e quindi le loro derivate rispetto al tempo e i gradienti. Abbiamo allora le formule:

$$Q = \int_A \underline{v}\, dA = \int_A v_x\, dA = v \cdot A \qquad \text{PORTATA VOLUMETRICA}$$

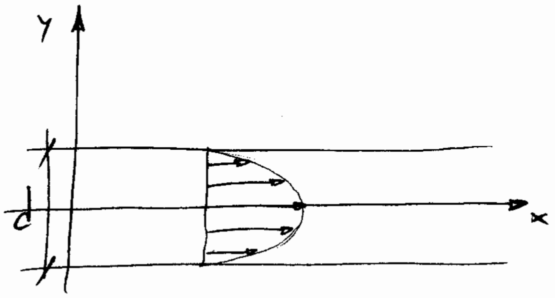
$$v = \frac{1}{A}\int_A v_x\, dA = \frac{Q}{A} \qquad \text{VELOCITÀ MEDIA}$$

$$M = \int_A \rho v_x (\underline{v}\cdot\underline{n})\, dA = \rho \int_A v_x^2\, dA = \rho\beta v^2 A = \rho\beta v Q \qquad \text{FLUSSO DELLA QUANTITÀ DI MOTO}$$

$$\beta = A \frac{\int_A v_x^2\, dA}{\left(\int_A v_x\, dA\right)^2} \qquad \text{COEFFICIENTE di RAGGUAGLIO per le VELOCITÀ al QUADRATO}$$

Il coefficiente di ragguaglio dipende, per il moto viscoso, dalla geometria della sezione, mentre se $v_x(y,z) = v$ possiamo tranquillamente assumere $\beta = 1$.

Nel caso di moto tra due lamine abbiamo, ad esempio:



$$v_x(y) = k\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

dove k è una costante qualunque.

Cerchiamo $\beta = A \dfrac{\int_A v_x^2 \, dA}{\left(\int_A v_x \, dA\right)^2}$:

$$\int_A v_x \, dA = k \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) dy = k\left[\frac{d^2}{4}y - \frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} = k\left[\frac{d^3}{8}\cdot 2 - \frac{d^3}{3\cdot 8}\cdot 2\right]$$

$$= k\left(\frac{d^3}{4} - \frac{d^3}{12}\right) = k\left(\frac{3d^3 - d^3}{12}\right) = \frac{kd^3}{6}$$

$$\int_A v_x^2 \, dA = k^2 \int_{-\frac{d}{2}}^{d/2} \left(\frac{d^4}{16} - \frac{d^2}{2}y^2 + y^4\right) dy = k^2\left[\frac{d^4}{16}y - \frac{d^2}{2}y^3 + y^5\right]_{-\frac{d}{2}}^{d/2}$$

$$= \dots = \frac{k^2 d^5}{30}$$

$$\beta = \frac{\cancel{d}\cdot \cancel{k^2}\cdot \cancel{d^5}\cdot 36}{30\cdot \cancel{k^2}\cdot \cancel{d^6}} = 1,2$$

Va detto, però, che quando il regime di moto tra due lastre piane diventa turbolento c'è la comparsa dello strato limite e quindi cambia il profilo di velocità. In tal caso abbiamo $\beta \hat{=} 1$.

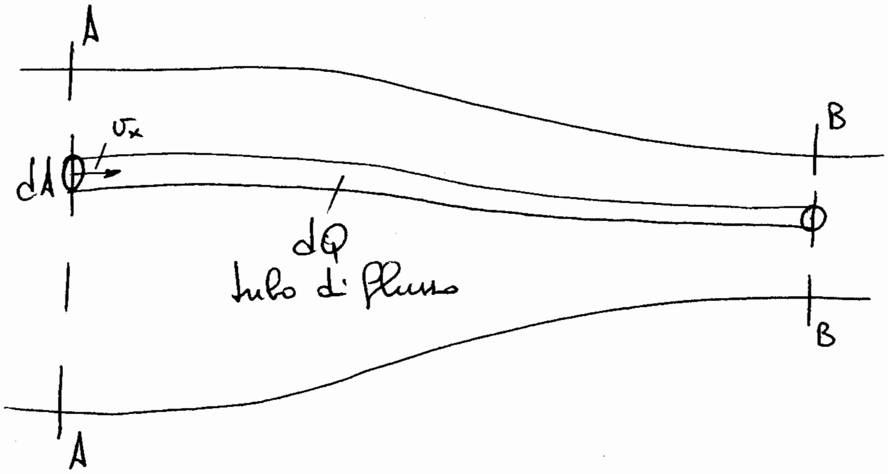
BERNOULLI per le CORRENTI

Per scrivere il teorema di Bernoulli per le correnti è necessario introdurre il concetto di potenza.

Definiamo potenza di una corrente in una generica sezione trasversale l'energia che la corrente fa passare attraverso la sezione nell'unità di tempo:

$$dE = \gamma H \, dV$$

$$dP = \gamma H \, dA \frac{dx}{dt} = \gamma H v_x \, dA = \gamma H \, dQ$$



Il flusso di energia attraverso l'intera sezione, ossia la somma di tutti i tubi di flusso, sarà quindi:

$$P = \int_A dP = \int_A \gamma H v_x \, dA = \int_Q \gamma H \, dQ$$

Nelle ipotesi di validità del teorema di Bernoulli, poiché tanto H che dQ rimangono costanti per ognuno dei tubi di flusso elementari che costituiscono la corrente, la potenza rimane costante, ovvero assume lo stesso valore in tutte le successive sezioni trasversali: $P_A = P_B$

Possiamo scrivere:

$$P = \int_A \gamma H v_x \, dA = \int_A \gamma h v_x \, dA + \int_A \gamma \frac{v_x^3}{2g} \, dA$$

$$= \gamma h v A + \frac{\rho}{2} \int_A v_x^3 \, dA = \gamma h v A + \frac{\rho}{2} \alpha v^3 A = \gamma h Q + P_c$$

dove v è la velocità media nella sezione

α è il coefficiente di ragguaglio per le velocità al cubo

P_c è detta potenza cinetica.

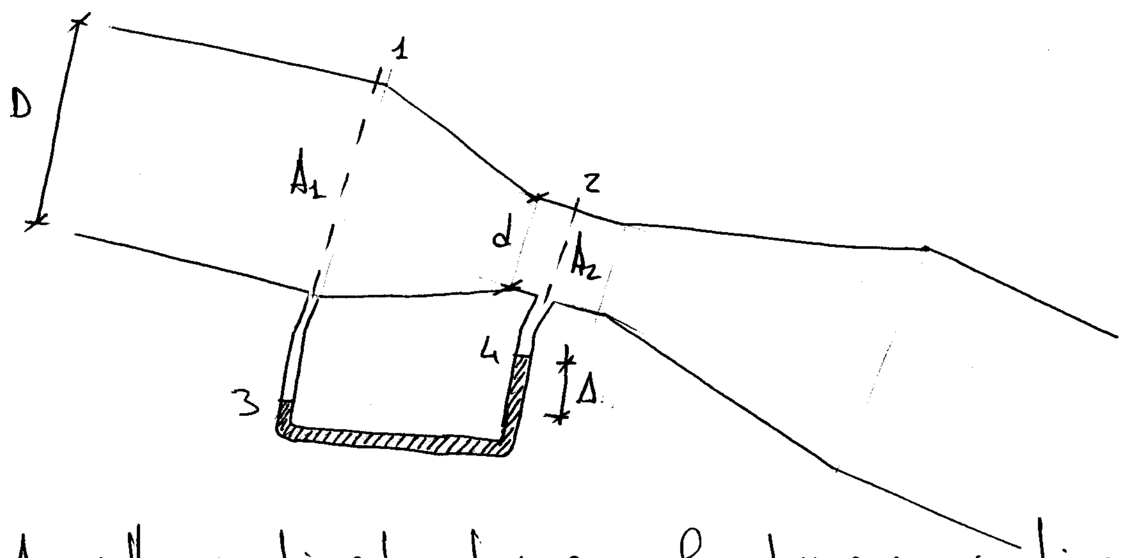
Il coefficiente di ragguaglio α è solitamente assunto pari a 1.
Possiamo anche esprimere la potenza come

$$P = \gamma v A \left(h + \alpha \frac{v^2}{2g} \right) = \gamma Q \overline{H}$$

dove $\overline{H}$ è detto carico caratteristico della sezione

VENTURIMETRO

Il venturimetro è un dispositivo usato per la misura delle portate, costituito da un manometro differenziale inserito alla convergenza di un tubo che passa dal diametro D al diametro d:



Ammettiamo di poter trascurare le dissipazioni di energia nel tronco convergente, di poter considerare la corrente come lineare e di fissare il coeff. di ragguaglio α pari a 1.
Per il teorema di Bernoulli abbiamo

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_2 \Rightarrow h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{Q}{A_1} \\ v_2 = \dfrac{Q}{A_2} \end{cases}$$ perché la portata rimane la stessa

$$\Rightarrow h_1 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{1}{A_1^2} = h_2 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{1}{A_2^2}$$

$$h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)$$

Possiamo così esprimere la portata come

$$Q = \frac{\sqrt{2g\,(h_1 - h_2)}}{\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)^{1/2}}$$

Nel manometro differenziale avremo:

$$h_1 - h_2 = z_3 + \frac{p_3}{\gamma} - z_4 - \frac{p_4}{\gamma} = (z_3 - z_4) + \frac{p_3 - p_4}{\gamma}$$

Inoltre, poiché h è costante nelle direzioni trasversali al moto, abbiamo:

$$z_3 + \frac{p_3}{\gamma} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma}$$

$$z_3 + \frac{p_3}{\gamma_m} = z_4 + \frac{p_4}{\gamma_m} \Rightarrow p_3 - p_4 = \gamma_m (z_4 - z_3) = \Delta \gamma_m$$

Abbiamo infine

$$h_1 - h_2 = z_3 - z_4 + \frac{\gamma_m}{\gamma}(z_4 - z_3) = \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)\Delta$$

$$\Rightarrow Q = \frac{A_1 \cdot A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g\,\frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\,\Delta}$$

La quantità $\frac{A_1 \cdot A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} = c_q$ è fornita dai costruttori.

PERDITE di CARICO

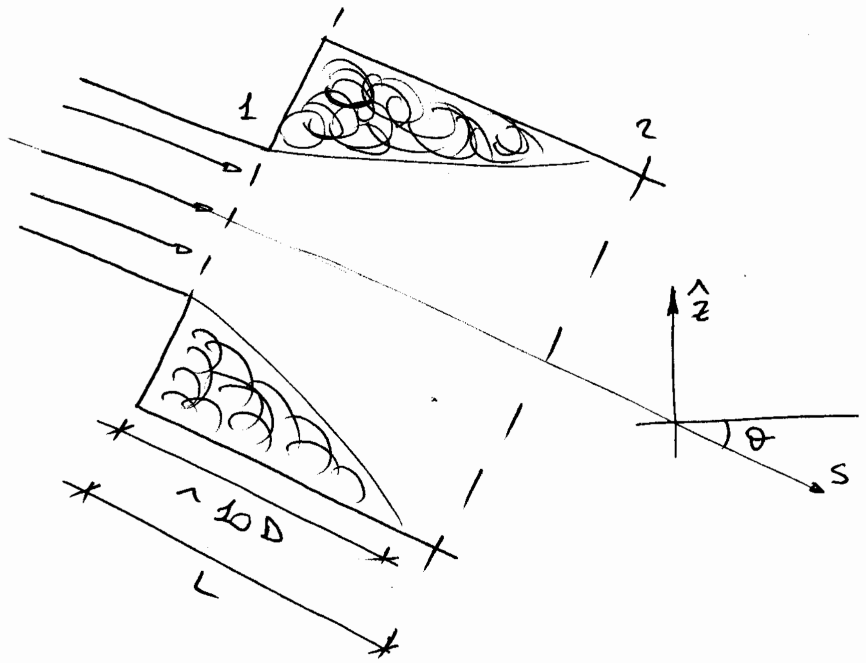
Il teorema di Bernoulli afferma che il carico totale H rimane costante in tutte le sezioni.

Nella realtà ciò non è vero, e possiamo dire che tra due sezioni abbiamo una perdita di carico ΔH pari a:

$$\Delta H = H_1 - H_2$$

Conoscendo la perdita di carico posso applicare il teorema di Bernoulli anche alle situazioni reali.

Calcoliamo ad esempio la perdita di carico dovuta ad un brusco allargamento della sezione.



$$M_u - M_e = G + \Pi$$

$$G = \gamma V \operatorname{sen}\vartheta = \gamma A_2 L \operatorname{sen}\vartheta = \gamma A_2 (\hat{z}_1 - \hat{z}_2)$$

$$\Pi = p_1 A_2 - p_2 A_2$$

(trascuriamo le tensioni tangenziali)

$$M_1 = \rho Q v_1$$

$$M_2 = \rho Q v_2$$

$$\Rightarrow \rho Q (v_2 - v_1) = \gamma A_2 (\hat{z}_1 - \hat{z}_2) + A_2 (p_1 - p_2)$$

$$\begin{cases} \rho \dfrac{v_2^2 A_2}{\gamma A_2} - \rho \dfrac{v_1^2 A_1}{\gamma A_2} = \hat{z}_1 - \hat{z}_2 + \dfrac{p_1 - p_2}{\gamma} \\ v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \dfrac{A_2}{A_1} \end{cases}$$

$$\hat{z}_1 - \hat{z}_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{g} - \frac{v_1^2}{g}\frac{A_1}{A_2}$$

$$\hat{z}_1 - \hat{z}_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_2^2}{g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) = h_1 - h_2$$

$$H_1 - H_2 = h_1 - h_2 + \frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\Rightarrow H_1 - H_2 = \frac{v_2^2}{g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right) + \frac{1}{2}\frac{v_2^2}{g}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \frac{v_2^2}{2g}$$

$$= \frac{v_2^2}{2g}\left(2 - 2\frac{A_2}{A_1} + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right)$$

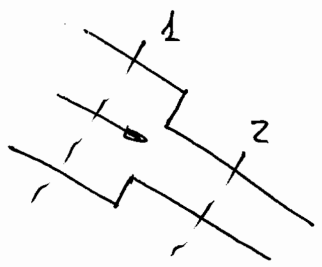
$$= \frac{v_2^2}{2g}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 2\frac{A_2}{A_1} + 1\right) = \frac{v_2^2}{2g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

Abbiamo allora

$$\Delta H = \begin{cases} \dfrac{v_1^2}{2g}\left(1 - \dfrac{A_1}{A_2}\right)^2 \\[2ex] \dfrac{v_2^2}{2g}\left(1 - \dfrac{A_2}{A_1}\right)^2 \end{cases}$$

e quindi la perdita di carico dipende unicamente dalla velocità.

Nel caso del restringimento della sezione l'analisi è simile. Possiamo in tal caso introdurre il coefficiente ξ in funzione del rapporto tra le aree A_2 e A_1 da inserire nella formula:



$$\Delta H = \xi \frac{v^2}{2g}$$

A_2/A_1	0,2	0,4	0,5	0,8
ξ	0,44	0,31	0,24	0,13