DINAMICA delle CORRENTI

MOTO di POISEUILLE

L'unico caso interessante dove è possibile risolvere le equazioni di Navier-Stokes è l'analisi del moto permanente in un condotto cilindrico.

Scriviamo quindi le equazioni in coordinate cilindriche facendo le ipotesi di moto:

- stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- uniforme: $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$
- a simmetria assiale: $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

Per l'ipotesi di moto uniforme possiamo osservare come la velocità dipenda dalla sola posizione radiale: $v_x(r)$

Per la direzione x abbiamo quindi l'equazione:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_x}{\partial \theta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial(-g\hat{z})}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x$$

che, tenendo conto delle ipotesi, diventa:

$$\nu \nabla^2 v_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + g\hat{z}\right)$$

Ricordando la definizione di cadente piezometrica:

$$i = -\frac{dh}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\gamma} + \hat{z}\right)$$

possiamo scrivere l'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) = -\frac{g}{\nu} i = -\frac{\gamma}{\mu} i = \text{costante}$$

Considerando quindi un condotto cilindrico a sezione circolare potremo risolvere l'equazione differenziale per successive integrazioni imponendo le condizioni al contorno:

- $v_x(R) = 0$ per l'aderenza del fluido alle pareti;
- $\frac{dv_x(0)}{dr} = 0$ per ragioni di simmetria radiale.

A partire dalla

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_x}{dr}\right) = -\frac{g}{\nu}\cdot i \cdot r$$

abbiamo, per due integrazioni, le espressioni

$$\cancel{r}\,\frac{dv_x}{dr} = -\frac{g\cdot i}{2\nu} r^{\cancel{2}} + \frac{A}{r}$$

$$v_x = -\frac{g\cdot i}{4\nu} r^2 + A \ln r + B$$

dove le costanti di integrazione valgono

$$A = 0 \qquad \text{(seconda condizione)}$$

$$B = \frac{g i}{4\nu} R^2 \qquad \text{(prima condizione)}$$

Portando così dall'espressione

$$v_x = \frac{g i}{4\nu}\left(R^2 - r^2\right)$$

possiamo calcolare la portata:

$$Q = \int_A v_x \, dA = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} v_x(r)\, r \, d\theta \right) dr$$

$$= \int_0^R 2\pi v_x(r)\, r\, dr = \frac{2\pi g i}{4\nu} \int_0^R \left(R^2 r - r^3\right) dr$$

$$= \frac{2\pi g i}{4\nu} \cdot \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{\pi g i R^4}{8\nu}$$

Nota la portata, possiamo esprimere la velocità media nel condotto come:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{g\cdot i}{8\nu} R^2 = \frac{g\cdot i}{32\nu} D^2$$

Da quest'ultima espressione è facile ricavare una relazione che esprima la cadente piezometrica:

$$i = \frac{32 \nu v}{g D^2}$$

TURBOLENZA

Quando la velocità media di una corrente fluida oltrepassa un certo valore critico il moto perde la regolarità che aveva a basse velocità: le traiettorie delle singole particelle fluide non sono più parallele all'asse della corrente e così, al moto del trasporto viene a sovrapporsi un moto disordinato di agitazione che prende il nome di turbolenza.

Un importante indicatore della presenza di fenomeno turbolento è il già citato numero di Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot D}{\nu}$$

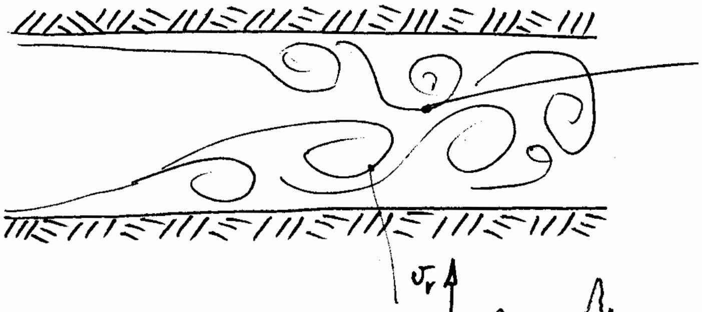
che, essendo il rapporto tra le forze del moto e quelle di attrito, tiene conto dell'energia dissipata dall'agitazione:

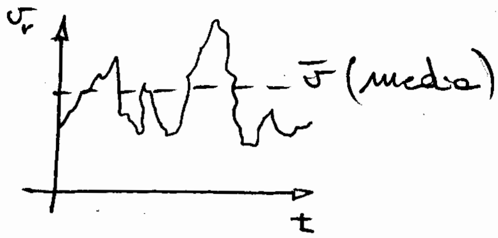
- quando Re è grande (>2500) sappiamo che il fluido ha troppa energia che deve dissipare mediante la turbolenza del moto;
- quando Re è piccolo abbiamo moto laminare

L'equazione di Navier-Stokes non è risolubile nel caso di moto turbolento né in via generale né in via numerica (il numero di punti necessari per l'analisi numerica è $Re^{9/4}$).

Potremo comunque utilizzare un metodo semiempirico per scrivere le equazioni che governano il moto medio del fluido. Tali equazioni non sono affatto banali, poiché alle caratteristiche medie del flusso dovremo aggiungere dei termini aggiuntivi che dipendono dalla fluttuazione turbolenta:

il moto in un condotto ha la forma:





$$v_r(t) = \bar{v}(t) + v'(t)$$

$$\bar{v}_r(t) = \frac{1}{T}\int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_r(t)\,dt$$