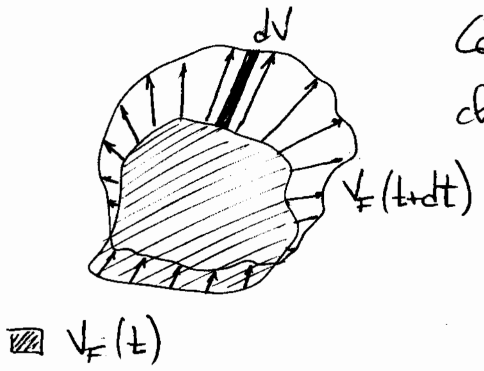
DINAMICA

Al fine di scrivere convenientemente le equazioni della dinamica dei fluidi è necessario utilizzare tre teoremi per esprimere in forma integrale il campo di moto delle particelle fluide.

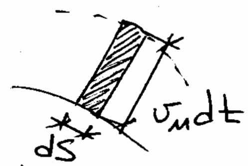
TEOREMA del TRASPORTO



Consideriamo un volume fluido generico che varia nel tempo dt.

Ogni singolo elementino di variazione sarà

$$dV = dS\, v_n\, dt$$



Possiamo esprimere la variazione della grandezza b:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} b(\underline{x},t)\,dV = \frac{1}{dt}\left\{\int_{V(t+dt)} b(\underline{x},t+dt)\,dV - \int_{V(t)} b(\underline{x},t)\,dV\right\} =$$

$$= \frac{1}{dt}\left\{\int_{V(t)} b(x,t-dt)\,dV + \int_{V(t+dt)-V(t)} b(\underline{x},t+dt)\,dV - \int_{V(t)} b(\underline{x},t)\,dV\right\}$$

$$= \int_V \frac{\partial b}{\partial t}\,dV - \frac{1}{dt}\int_S b(\underline{x},t+dt)\,v_n\,dt\,dS$$

$$= \int_V \frac{\partial b}{\partial t}\,dV - \int_S b\,v_n\,dS = \int_V \frac{\partial b}{\partial t}\,dV - \int_S b\,\underline{v}\cdot\underline{n}\,dS$$

N.B. il segno − è dovuto al fatto che $\underline{n}$ è considerata entrante

TEOREMA di GAUSS

Il teorema della divergenza dice che:

$$\int_S \underline{v}\cdot\underline{n}\,dS = -\int_V \nabla\cdot\underline{v}\,dV$$

dove $\nabla \cdot \underline{v} = \operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Abbiamo allora:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} b(\underline{x}, t)\, dV = \int_V \left\{ \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla \cdot (b \underline{v}) \right\} dV$$

SVILUPPO della DIVERGENZA

Possiamo sviluppare la divergenza di uno scalare per un vettore:

$$\nabla \cdot (b \underline{v}) = \frac{\partial b v_x}{\partial x} + \frac{\partial b v_y}{\partial y} + \frac{\partial b v_z}{\partial z}$$

$$= b \frac{\partial v_x}{\partial x} + b \frac{\partial v_y}{\partial y} + b \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_x \frac{\partial b}{\partial x} + v_y \frac{\partial b}{\partial y} + v_z \frac{\partial b}{\partial z}$$

$$= b\, \nabla \cdot \underline{v} + \underline{v} \cdot \nabla b$$

Abbiamo allora:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} b(\underline{x}, t)\, dV = \int_V \left\{ \frac{\partial b}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla b + b\, \nabla \cdot \underline{v} \right\} dV$$

$$= \int_V \left\{ \frac{dv}{dt} + b\, \nabla \cdot v \right\} dV$$

EQUAZIONI della DINAMICA FORMA INTEGRALE

CONSERVAZIONE della MASSA

L'equazione integrale di conservazione della massa per il volume fluido $V_F = V$ in forma lagrangiana è:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\, dV = 0$$

Per quanto detto dal teorema del trasporto possiamo scrivere la relazione in forma euleriana come:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho\, \underline{v} \cdot \underline{n}\, dS = 0$$

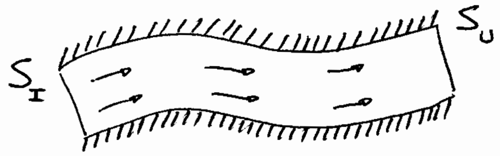
Considerato poi che l'acqua è un fluido praticamente incomprimibile

- per velocità minori a quella del suono
- per variazioni di temperatura contenute in qualche °C

assumiamo quindi $\rho =$ costante ed abbiamo

$$\int_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

Esempio



$Q =$ portata $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

Considerando una corrente in moto l'equazione

$$\int_{S_I} \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = \int_{S_U} \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS$$

diventa $Q_I = Q_U$

CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO

Analogamente a quanto accade nella fisica del punto materiale, dove abbiamo

$$m \underline{a} = m \frac{d}{dt} \underline{v} = \sum F$$

possiamo scrivere l'equazione di conservazione della quantità di moto per il volume fluido in forma lagrangiana come:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} \, dV = \int_V \underline{f} \, dV + \int_S \underline{\tau} \, dS$$

Per il teorema del trasporto possiamo scrivere la relazione in termini euleriani come:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) \, dV - \int_S \rho \underline{v} \, (\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dS = \int_V \underline{f} \, dV + \int_S \underline{\tau} \, dS$$

Possiamo scrivere la relazione anche nella forma

$$\underline{I} + \underline{M}_U - \underline{M}_I = \underline{G} + \underline{\Pi}$$

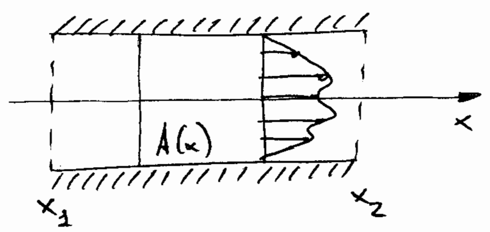
dove

- $\underline{I} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, dV$ è detta INERZIA LOCALE

  è un termine che compare solo quando ci sono delle variazioni temporali della velocità

- $$-\int_S \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS = -\int_{S_U} \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS - \int_{S_I} \rho \underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{n})\, dS = \underline{M}_U - \underline{M}_I$$

Esempio 1



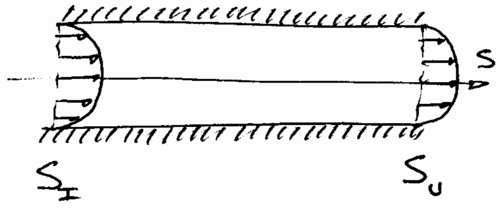
Determiniamo l'inerzia locale per una corrente che scorre nella direzione x:

$$\underline{I} = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_{A(x)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{v})\, dA \right\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho \int_A \underline{v}\, dA \right\} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx = \rho \begin{bmatrix} \frac{dQ}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (x_2 - x_1)$$

Generalizzando lungo una generica linea di lunghezza L avremo

$$I_s = \rho \dot{Q} L$$

Esempio 2



Consideriamo una corrente a profilo uniforme lungo una generica linea. Avremo

$$\underline{M}_{I,s} = \int_{S_I} \rho v_s^2\, dS = \rho \int_{S_I} v_s^2\, dS = \rho v^2 S_I = \rho \cdot Q_I \cdot v$$

Analogamente sarebbe $\underline{M}_{v_s} = \rho Q_v \underline{v}$.

L'espressione generale per profili non uniformi sarebbe

$$\underline{M} = \rho \beta Q \underline{v}$$

dove $\beta = \dfrac{\int v_s^2 dS}{Q v^2}$ è detto coefficiente correttivo o di ragguaglio.

Per profili uniformi si assume $\beta \cong 1$ perché $(v^2)_{media} = (v_{media})^2$.

CONSERVAZIONE del MOMENTO della Q.d.M.

In forma lagrangiana possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \cdot \underline{v} \times (\underline{x}-\underline{x}_0) = \int_V \underline{f} \times (x-x_0)\, dV + \int_S \underline{t} \times (\underline{x}-\underline{x}_0)\, dS$$

In forma euleriana avremo invece:

$$\int_V \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} \times (\underline{x}-x_0)\, dV - \int_S \rho \underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{n}) \times (\underline{x}-\underline{x}_0)\, dS = \underline{G}_{\mathcal{M}} + \underline{\Pi}_{\mathcal{M}}$$

che potremo anche scrivere come

$$\underline{I}_{\mathcal{M}} + \underline{M}_{U,\mathcal{M}} - \underline{M}_{I,\mathcal{M}} = \underline{G}_{\mathcal{M}} + \underline{\Pi}_{\mathcal{M}}$$

dove

- $\underline{I}_{\mathcal{M}} = \underline{I} \times (\underline{x}-\underline{x}_0) = \int_V \dfrac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} \times (\underline{x}-\underline{x}_0)\, dV$ è chiamata inerzia giroscopica locale
- $\underline{M}_{U,\mathcal{M}} - \underline{M}_{I,\mathcal{M}} = \underline{M}_U \times (\underline{x}-\underline{x}_0) - \underline{M}_I \times (\underline{x}-\underline{x}_0) = \dots$ sono dette portata di momento della quantità di moto in ingresso e in uscita.

EQUAZIONI della DINAMICA
FORMA DIFFERENZIALE

CONSERVAZIONE della MASSA

A partire dall'equazione in forma lagrangiana

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \, dV = 0$$

per ogni volume continuo, grazie al teorema di Gauss, possiamo scrivere:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right\} dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

Nel caso dei fluidi, che assumiamo incomprimibili, risulta:

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

Abbiamo così ottenuto l'equazione indefinita di continuità per i fluidi, che possiamo anche scrivere come:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

CONSERVAZIONE della QdM

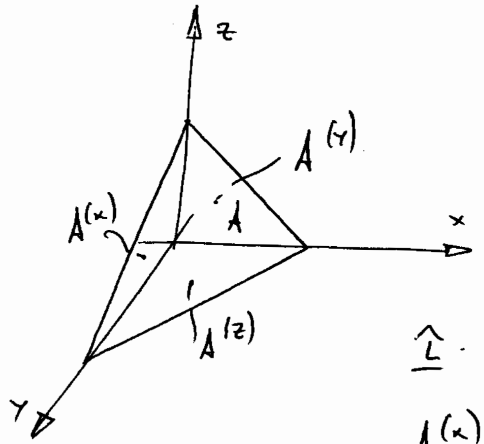
A partire dall'equazione in forma lagrangiana:

$$\frac{d}{dt}\int_{V(t)} \rho \underline{v} \, dV = \int_V \underline{f} \, dV + \int_S \underline{\hat{t}} \, dS$$

possiamo scrivere, grazie allo sviluppo della divergenza:

$$\int_V \rho \left\{ \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right\} dV = \int_V \underline{f} \, dV + \int_S \underline{\hat{t}} \, dS$$

Vediamo ora come esprimere lo sforzo $\underline{\tau}$ in funzione del tensore degli sforzi.

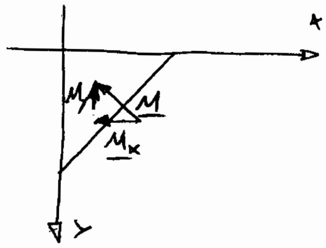


Consideriamo il tetraedro di figura, detto "tetraedro di Cauchy" e composto dalle quattro aree $A, A^{(x)}, A^{(y)}, A^{(z)}$

Per la statica:

$$\underline{\tau} \cdot A + \underline{\tau}^{(y)} A_y + \underline{\tau}^{(x)} A^{(x)} + \underline{\tau}^{(z)} A^{(z)} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} A^{(x)} &= A(-n_x) \\ A^{(y)} &= A(-n_y) \\ A^{(z)} &= A(-n_z) \end{aligned}\right\}$$



$$\underline{\tau} A = \underline{\tau}^{(x)} A\, n_x + \underline{\tau}^{(y)} A\, n_y + \underline{\tau}^{(z)} A\, n_z$$

$$\underline{\tau} = \underline{\tau}^{(x)} n_x + \underline{\tau}^{(y)} n_y + \underline{\tau}^{(z)} n_z$$

Definito il tensore degli sforzi $\overline{\overline{\mathbb{T}}}$ come:

$$\overline{\overline{\mathbb{T}}} = \begin{bmatrix} \underline{\tau}^{(x)} \\ \underline{\tau}^{(y)} \\ \underline{\tau}^{(z)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x^{(x)} & \tau_x^{(y)} & \tau_x^{(z)} \\ \tau_y^{(x)} & \tau_y^{(y)} & \tau_y^{(z)} \\ \tau_z^{(x)} & \tau_z^{(y)} & \tau_z^{(z)} \end{bmatrix}$$

possiamo affermare che

$$\underline{\tau} = \overline{\overline{\mathbb{T}}} \cdot \underline{n}$$

Dal teorema di Gauss abbiamo

$$\int_S \tau \, dA = \int_S \overline{\overline{\mathbb{T}}} \cdot \underline{n} \, dA = - \int_V \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbb{T}}} \, dV$$

e possiamo quindi scrivere

$$\int_V \rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) dV = \int_V \left\{ \underline{f} - \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbb{T}}} \right\} dV$$

Portando fuori dal segno di integrale abbiamo

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = \underline{f} - \nabla \cdot \overline{\overline{\mathbb{T}}}$$

e posso quindi scrivere l'equazione differenziale di conservazione della quantità di moto:

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{f} - \nabla \cdot \overline{\overline{T}}$$

CONSERVAZIONE del MOMENTO della Q.d.M.

Non scriveremo l'equazione differenziale, ma ci limitiamo ad osservare che il tensore $\overline{\overline{T}}$ è simmetrico.

EQUAZIONE COSTITUTIVA

Volendo trovare $\underline{v}$ e $\overline{\overline{T}}$ per un fluido non mi possono bastare le sole equazioni di continuità e di conservazione della q.d.m., poiché ragionando in termini scalari ho 9 incognite ($\underline{v} \to 3$, $\overline{\overline{T}} \to 6$) e 4 equazioni.
Introduciamo quindi l'equazione costitutiva per determinare il tensore degli sforzi:

$$\overline{\overline{T}} = f(\underline{v}, \nabla \underline{v}, p)$$

Tale equazione mi identifica il tipo di fluido e consiste in 6 equazioni scalari con l'aggiunta dell'incognita p.
Abbiamo già detto che:

$$\hat{\underline{t}} = \overline{\overline{T}} \cdot \underline{n}$$

e possiamo scrivere tale equazione come

$$\begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} n_x + T_{xy} n_y + T_{xz} n_z \\ T_{yx} n_x + T_{yy} n_y + T_{yz} n_z \\ T_{zx} n_x + T_{zy} n_y + T_{zz} n_z \end{bmatrix}$$

Il primo requisito che la nostra equazione dovrà avere è che, in condizioni idrostatiche, deve essere:

$$\hat{\underline{t}} = p \cdot \underline{n}$$

e quindi, in forma vettoriale,

$$\begin{bmatrix} \hat{t}_x \\ \hat{t}_y \\ \hat{t}_z \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \overline{\overline{T}} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Per velocità nulle dovremo quindi avere

$$\overline{\overline{T}} = p \, \overline{\overline{I}}$$

Il secondo requisito sarà che il tensore $\overline{\overline{T}}$ dipenda dal tasso di deformazione locale all'istante considerato, ossia che non dipenda da quanto è accaduto al fluido nel passato. Tale condizione si può esprimere con la scrittura

$$\overline{\overline{T}} = f\left(\overline{\overline{D}}\right)$$

con $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$