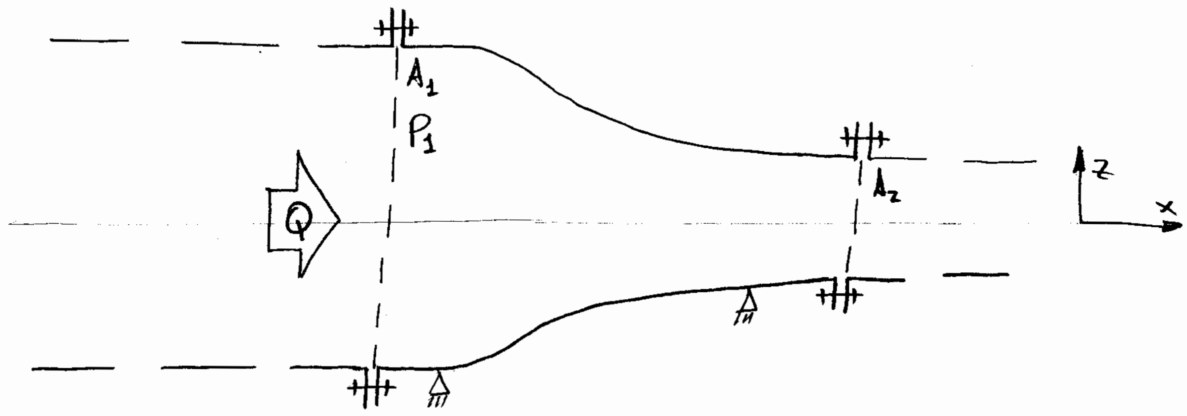
IDRODINAMICA

ESERCIZI SVOLTI da PEDRIZZETTI

n°1



Calcolare le componenti F_x e F_z della forza agente sui due appoggi di figura.

Possiamo scrivere l'equazione di conservazione della quantità di moto:

$$\underline{G} + \underline{\hat{\Pi}} = \underline{M}_u - \underline{M}_e + \underline{I}$$

Possiamo trascurare l'inerzia locale $\underline{I}$ poiché è lecito supporre il moto stazionario.

Lungo la componente x abbiamo:

$$G_x = 0$$

$$\hat{\Pi}_x = \hat{\Pi}_1 + \hat{\Pi}_2 + \hat{\Pi}_L = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_x$$

$$M_{u_x} = \rho Q v_2 = \rho \frac{Q^2}{A_2}$$

$$M_{e_x} = \rho Q v_1 = \rho \frac{Q^2}{A_1}$$

e pertanto l'equazione diventa

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_x = \rho \frac{Q^2}{A_2} - \rho \frac{Q^2}{A_1}$$

e quindi

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)$$

Possiamo calcolare p_2 a partire dal Teorema di Bernoulli, che in questa situazione è possibile applicare poiché:

- non è presente la vorticità;
- possiamo trascurare le perdite di carico data la lunghezza limitata del tronco convergente.

Abbiamo allora:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{\gamma}{2g}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$

Abbiamo anche

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{Q}{A_1} \\ v_2 = \dfrac{Q}{A_2} \end{cases}$$

e quindi

$$p_2 = p_1 + \frac{\gamma}{2g} Q^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) = p_1 + \frac{\rho}{2} Q^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$

$$F_x = p_1 A_1 - \frac{\gamma}{2g} Q^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) A_2 - \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right) - p_1 A_2$$

$$= p_1 (A_1 - A_2) + \rho Q^2 \left(\frac{(A_1 + A_2)^2}{2 A_1^2 A_2}\right)$$

Lungo la componente z la situazione è idrostatica, e quindi avremo semplicemente:

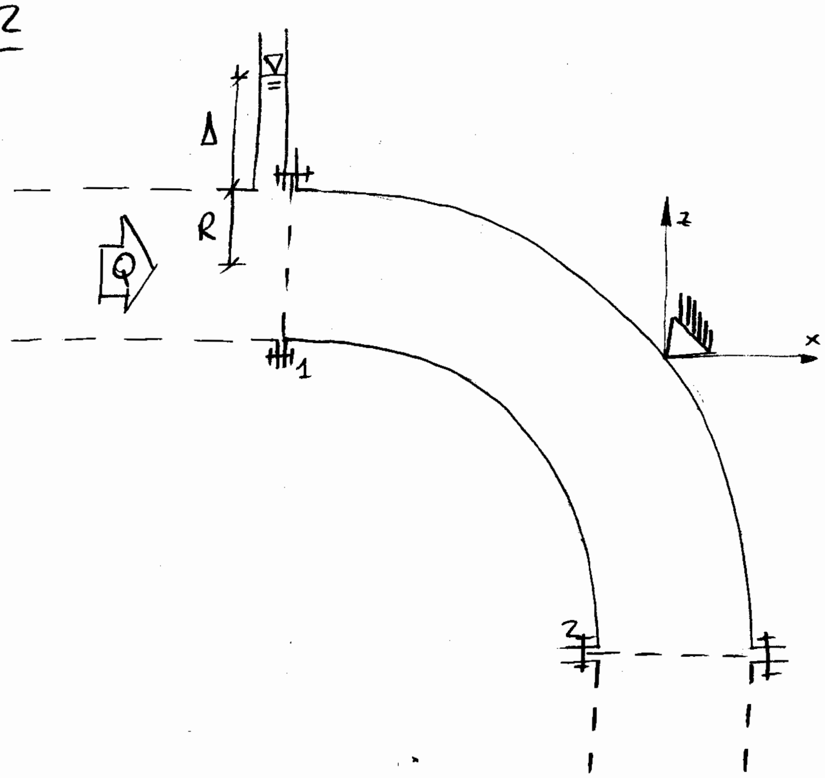
$$G_z = -\gamma V$$

$$\Pi_z = -F_z$$

e quindi

$$F_z = -\gamma V$$

n°2



Calcolare la forza agente sull'appoggio di figura.

Il procedimento è analogo a quello dell'esercizio precedente.

$$\underline{G} + \underline{\Pi} = \underline{M}_u - \underline{M}_e + \cancel{\underline{I}}$$

x> $G_x = 0$

$$\Pi_x = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_L = p_1 A_1 + 0 - F_x = p_1 \pi R^2 - F_x$$

$$M_e = \rho Q v_1 = \rho \frac{Q^2}{A_1} = \rho \frac{Q^2}{\pi R^2}$$

$$M_u = 0$$

$$\Rightarrow \quad p_1 \pi R^2 - F_x = -\rho \frac{Q^2}{\pi R^2} \Rightarrow F_x = p_1 \pi R^2 + \rho \frac{Q^2}{\pi R^2}$$

Possiamo trovare p_1 considerando che il carico piezometrico è costante sulla sezione trasversale:

$$p_1 = \gamma (R + \Delta)$$

$$\Rightarrow F_x = \gamma (R + \Delta) \pi R^2 + \rho \frac{Q^2}{\pi R^2}$$

z> $G_z = -\gamma V$

$$\Pi_z = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_L = 0 + p_2 A_2 - F_z = p_2 \pi R^2 - F_z$$

$$M_u = \rho Q v_2 = -\rho \frac{Q^2}{A_2} = -\rho \frac{Q^2}{\pi R^2}$$

$$M_e = 0$$

$$\Rightarrow -\gamma V + p_2 A_2 - F_z = -\rho \frac{Q^2}{A_2} \Rightarrow F_z = -\gamma V - p_2 \pi R^2 + \rho \frac{Q^2}{\pi R^2}$$

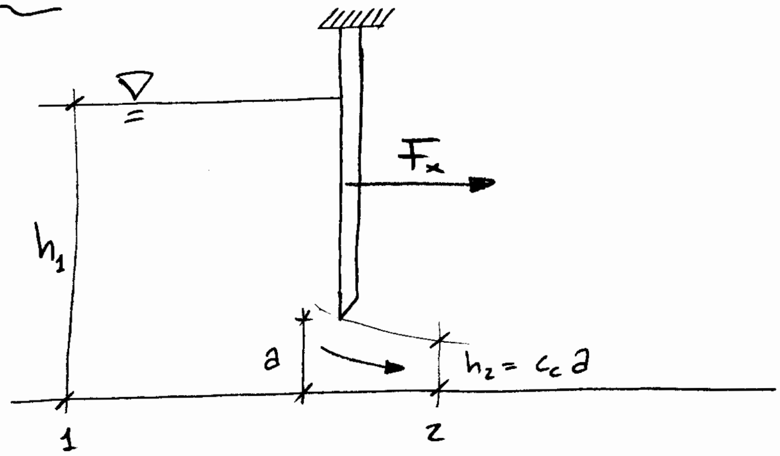
Possiamo trovare p_2 mediante il Teorema di Bernoulli:

$$H_1 = H_2 \Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \cancel{\frac{v_2^2}{2g}}$$

$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \gamma (z_1 - z_2)$$

$$\Rightarrow F_z = -\gamma V - p_1 \pi R^2 - (z_1 - z_2) \gamma \pi R^2 + \rho \frac{Q^2}{\pi R^2}$$

n° 3



Calcolare la forza agente sulla paratoia.

Sulla paratoia possono agire forze nella sola componente orizzontale: vale quindi l'equazione

$$\cancel{G_x} + \Pi_x = M_{u_x} - M_{e_x} + \cancel{I_x}$$

$$\Pi_x = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_{pav.} + \Pi_{fondo} + \Pi_{sup\,l.l.}$$

possiamo però trascurare le tensioni tangenziali e quindi

$$\Pi_x = \gamma \frac{h_1^2}{2} - \gamma \frac{h_2^2}{2} - F_x$$

$$M_{u_x} = \rho Q v_2$$

$$M_{e_x} = \rho Q v_1$$

Abbiamo così

$$\frac{\gamma}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) - F_x = \rho Q \left(v_2 - v_1\right)$$

$$\Rightarrow F_x = \frac{\gamma}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) - \rho Q \left(v_2 - v_1\right)$$

Nel caso in cui si abbia a disposizione μ (relativo al carico piezometrico h_1) possiamo calcolare Q con la relazione

$$Q = \mu \sqrt{2 g h_1}$$

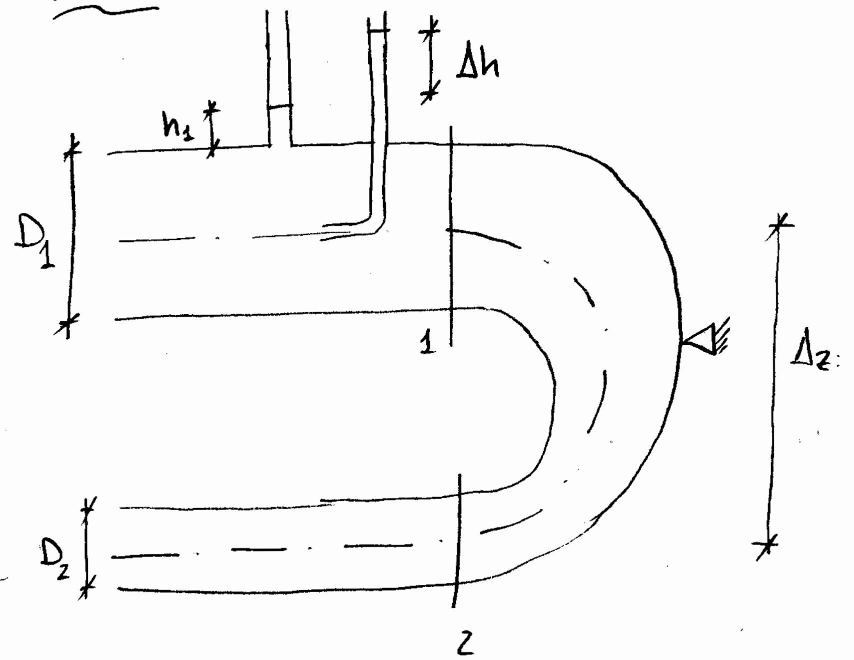
Possiamo in ogni caso calcolare Q a partire dal Teorema di Bernoulli:

$$\begin{cases} Q = v_1 h_1 = v_2 h_2 & \text{(portata per unità di larghezza...)} \\ H_1 = H_2 \Rightarrow h_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = h_2 + \dfrac{v_2^2}{2g} \end{cases}$$

$$h_1 - h_2 = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}}} \sqrt{2g\left(h_1 - h_2\right)}$$

n° 4



$D_1 = 400$ mm $= 0{,}4$ m

$D_2 = 150$ mm $= 0{,}15$ m

$\Delta z = 50$ cm $= 0{,}5$ m

$h_1 = 2$ m

$\Delta h = 51$ mm $= 0{,}051$ m

Calcolare la forza agente sull'appoggio di figura in direzione x

Dalla colonna del carico piezometrico nella sezione orizzontale abbiamo:

$$p_1 = \gamma \left(h_1 + \frac{D_1}{2}\right) = \gamma \cdot 2{,}2 \text{ m} = 21582 \text{ Pa} = 21{,}58 \text{ kPa}$$

Dal teorema di Bernoulli applicato al tubo di Pitot abbiamo:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_1 + \Delta h \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}051} = 1 \text{ m/s}$$

Trascurando le perdite di carico, possiamo scrivere il teorema di Bernoulli applicato alle sezioni 1 e 2:

$$\begin{cases} z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \\ v_2 A_2 = v_1 A_1 = Q \end{cases} \Rightarrow v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4}}{\pi \cdot \frac{0{,}15^2}{4}} = 7{,}11 \text{ m/s}$$

$$p_2 = \gamma (z_1 - z_2) + \frac{\gamma}{2g}\left(v_1^2 - v_2^2\right) + p_1$$

$$= 10 (0{,}5) + \frac{1}{2 \cdot 9{,}8}\left(1 - 7{,}11^2\right) + 21{,}582 = 5 - 2{,}53 + 21{,}582 = 14 \text{ kPa}$$

Scriviamo poi l'equazione globale dell'equilibrio dinamico:

$$G + \Pi = M_u - M_e - \cancel{I}$$

In direzione x abbiamo

$$\Pi_x = p_1 \cdot A_1 + p_2 \cdot A_2 - F_x$$

$$M_{e_x} = \rho Q v_1 = \rho A_1 v_1^2$$

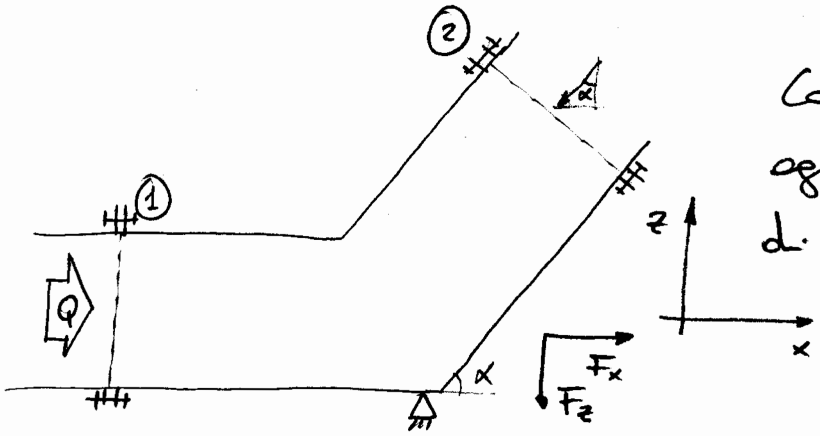
$$M_{u_x} = -\rho Q v_2 = -\rho A_2 v_2^2$$

$$\Rightarrow F_x = p_1 A_1 + p_2 A_2 + \rho A_1 v_1^2 + \rho A_2 v_2^2$$

$$= 21{,}58 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4} + 14 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}15^2}{4} + 1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4} \cdot 1 + 1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}15^2}{4} \cdot 7{,}11$$

$$= 2{,}71 + 0{,}25 + 0{,}13 + 0{,}13 = 3{,}22 \text{ kN}$$

n° 5



Calcolare la forza agente sull'appoggio di figura

Per la conservazione della quantità di moto:

$$\underline{G} + \underline{\Pi} = \underline{M}_u - \underline{M}_e + \underline{\mathbb{I}}$$

In direzione x abbiamo:

$$G_x = 0$$

$$\Pi_x = p_1 A - p_2 A \cos\alpha - F_x$$

$$M_e = \rho Q v$$

$$M_u = \rho Q v \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad p_1 A - p_2 A \cos\alpha - F_x = \rho Q v \cos\alpha - \rho Q v$$

$$F_x = A(-p_2 \cos\alpha + p_1) + \rho Q v (-\cos\alpha + 1)$$

sono solitamente note le quantità p_1 e Q;

troviamo v con l'espressione $v = \dfrac{Q}{A}$

e p_2 a partire dal teorema di Bernoulli:

supponiamo le perdite non trascurabili $(\xi = 0{,}2)$

$$H_1 = H_2 + \Delta H$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{v^2}{2g}} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \cancel{\frac{v^2}{2g}} + \xi \frac{v^2}{2g}$$

$$p_2 = p_1 - \gamma (z_2 - z_1) - \xi \rho \frac{v^2}{2}$$

In direzione z abbiamo invece:

$$G_z = -\gamma V$$

$$\Pi_z = p_2 A \,\mathrm{sen}\,\alpha + F_z$$

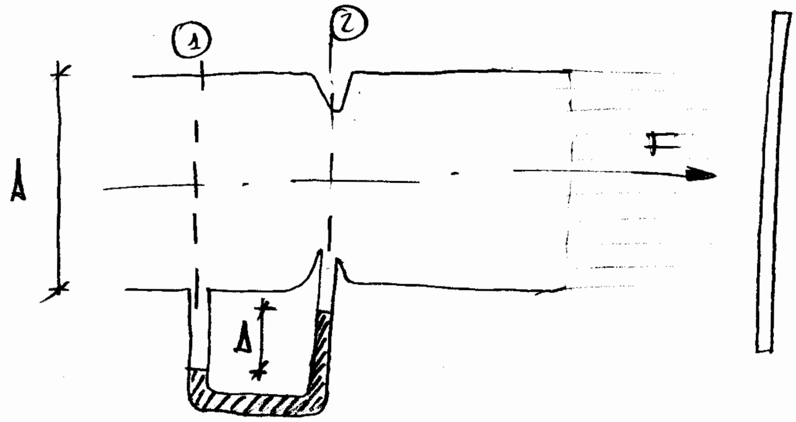
$$M_e = 0$$

$$M_u = \rho Q v \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad -\gamma V - p_2 A \,\mathrm{sen}\,\alpha + F_z = \rho Q v \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

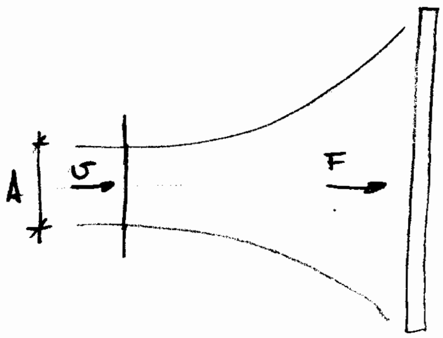
$$F_z = \gamma V + p_2 A \,\mathrm{sen}\,\alpha + \rho Q v \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

n°6



Calcolare la forza agente sulla lastra.

Sappiamo che $F = \rho Q v$, poiché



$$G_x = 0$$

$$\Pi_x = -F$$

$$M_{ex} = \rho Q v$$

$$M_{ux} = 0$$

$$G_x + \Pi_x = M_{ux} - M_{ex}$$

Per conoscere portata e velocità media ragioniamo sul manometro differenziale:

$$\frac{p_1}{\gamma_m} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma_m} + z_2 \quad \Rightarrow \quad p_1 - p_2 = \gamma_m (z_2 - z_1) = \gamma_m \Delta$$

Per il teorema di Bernoulli:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1^2}{2g} + h_1 = \dfrac{v_2^2}{2g} + h_2 \\ v_1 = \dfrac{Q}{A} \\ v_2 = \dfrac{Q}{A_2} \end{cases}$$

$$\frac{Q^2}{2g A^2} + z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = \frac{Q^2}{2g A_2^2} + z_2 + \frac{P_2}{\gamma}$$

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) = (z_2 - z_1) + \frac{P_2 - P_1}{\gamma} = \Delta - \frac{\gamma_m}{\gamma}\Delta$$

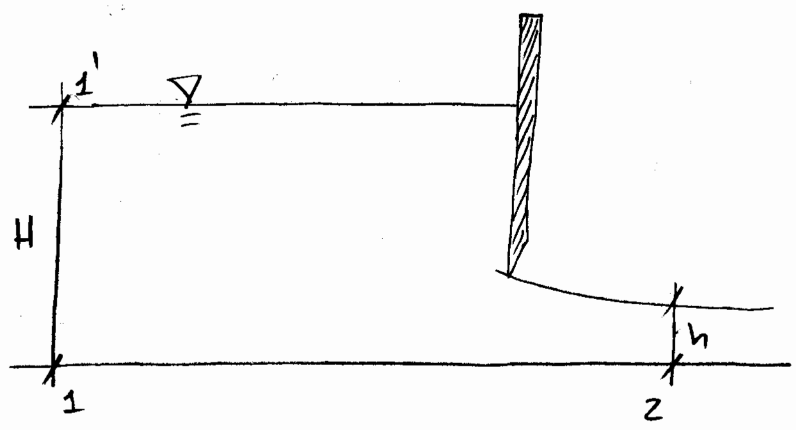
$$Q = \sqrt{\frac{2g \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}\Delta}{\frac{1}{A^2} - \frac{1}{A_2^2}}}$$

Da qui

$$F = \rho Q v = \rho \frac{Q^2}{A}$$

ESERCIZI TIPO PEDRIZZETTI

n° 1



$H = 1{,}2\ m$

$h = 0{,}5\ m$

Calcolare la forza agente sulla paratoia a battente.

Per il teorema di Bernoulli applicato alle correnti:

$$H + \frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{Q}{H} \\ v_2 = \dfrac{Q}{h} \end{cases} \Rightarrow \quad H + \frac{Q^2}{2gH^2} = h + \frac{Q^2}{2gh^2}$$

$$Q^2 + 2gH^3 = h\,2gH^2 + \frac{Q^2}{2gh^2}2gH$$

$$Q^2(2gh^2) + 2gH^3 2gh^2 = 2gh^3 2gH^2 + Q^2 2gH$$

$$2gQ^2(h^2 - H^2) = 4g^2h^2H^2(h-H)$$

$$Q^2 = 2g\,h^2H^2\frac{h-H}{(h-H)(h+H)}$$

$$Q = hH\sqrt{2g\,\frac{1}{h+H}} = 1{,}2\cdot 0{,}5\sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot\frac{1}{1{,}7}} = 2{,}04\ m^2/s$$

Scriviamo l'equazione globale dell'equilibrio dinamico:

$$\cancel{G} + \Pi = M_u - M_e - \cancel{I}$$

$$\Pi = \Pi_1 - \Pi_2 - F = \gamma H\cdot\frac{H}{2} - \gamma h\cdot\frac{h}{2} - F$$

$$M_e = \rho v_1 Q = \rho\frac{Q^2}{H}$$

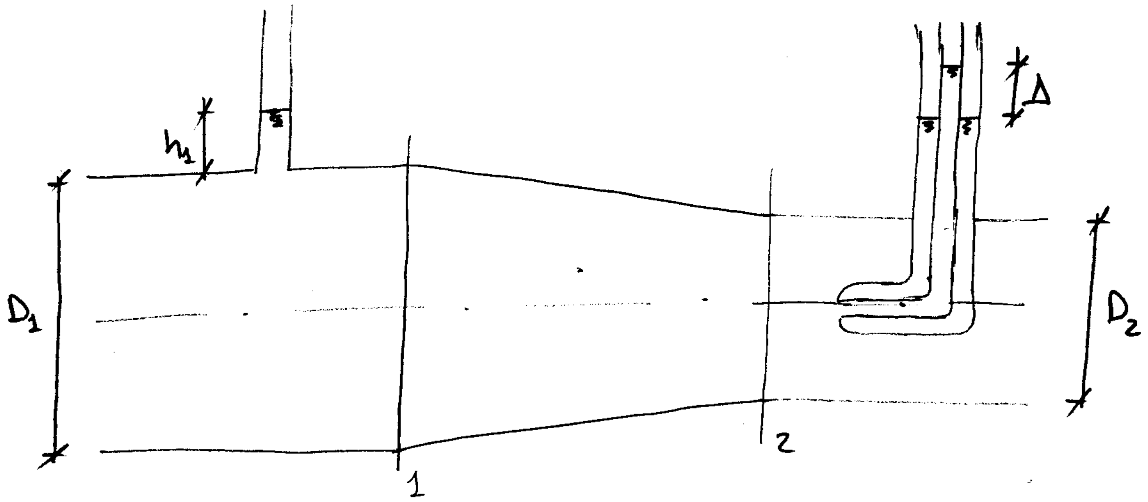
$$M_u = \rho v_2 Q = \rho\frac{Q^2}{h}$$

$$\frac{\gamma}{2}\left(H^2-h^2\right)-F=\rho Q^2\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{H}\right)$$

$$F=\frac{\gamma}{2}\left(H^2-h^2\right)+\rho Q^2\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{h}\right)$$

$$\stackrel{!}{=}\frac{10}{2}\left(1{,}2^2-0{,}5^2\right)+1\cdot 7{,}04^2\left(\frac{1}{1{,}2}-\frac{1}{0{,}5}\right)=5{,}95-4{,}86=1{,}09\ \frac{kN}{m}$$

n°2



$D_1=1{,}0$ m
$D_2=0{,}8$ m
$h_1=1{,}5$ m
$\Delta=51$ mm $\stackrel{!}{=}0{,}051$ m

Valutare la spinta orizzontale sul raccordo.

$$p_1=\gamma\left(h_1+\frac{D_1}{2}\right)=10\cdot(1{,}5+0{,}5)=20\ kPa$$ (carlonsa di h nella sezione 1)

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}$$ (Bernoulli per correnti)

$$v_2=\sqrt{2g\Delta}=\sqrt{2\cdot 10\cdot 0{,}051}=1\ m/s$$ (tubo di Pitot)

$$Q=v_2A_2=v_2\cdot\pi\cdot\frac{D_2^2}{4}=1\cdot\pi\cdot\frac{0{,}8^2}{4}=0{,}50\ m^3/s$$ (conservaz. massa)

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{Q}{\pi\frac{D_1^2}{4}}=\frac{0{,}5}{\pi\cdot\frac{1^2}{4}}=0{,}64\ m/s$$

$$\Rightarrow p_2=p_1+\frac{\gamma}{2g}\left(v_1^2-v_2^2\right)=20+\frac{10}{2\cdot 10}\left(0{,}64^2-1\right)=19{,}80\ kPa$$

$$\cancel{G}+\Pi=M_u-M_e-\cancel{I}$$ (equazione globale equilibrio dinamico)

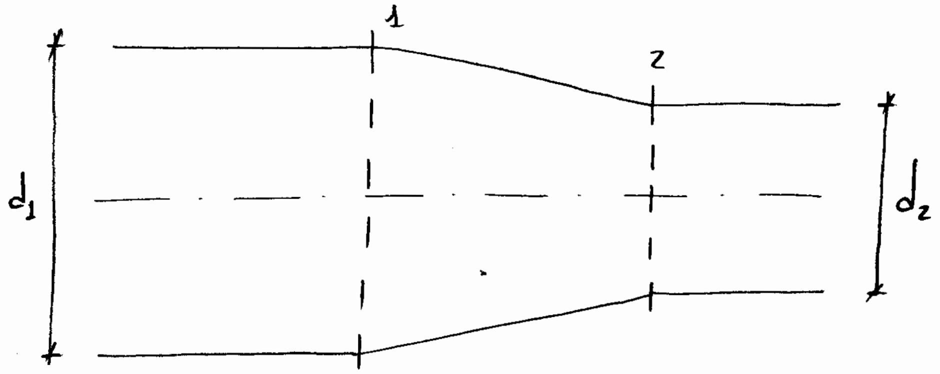
$$p_1A_1-p_2A_2-F=\rho Q^2\left(\frac{1}{A_1}-\frac{1}{A_2}\right)$$

$$F = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho Q^2 \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)$$

$$= 20 \cdot \pi \cdot \frac{1^2}{4} - 19{,}8 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}8^2}{4} + 1 \cdot 0{,}5^2 \left(\frac{1}{\pi \cdot \frac{0{,}8^2}{4}} - \frac{1}{\pi \cdot \frac{1^2}{4}}\right)$$

$$= 15{,}70 - 9{,}95 + 0{,}25 \left(\frac{1}{0{,}50} - \frac{1}{0{,}79}\right) = 5{,}93 \text{ kN}$$

n° 3



$Q = 1 \ m^3/s$

$\gamma_w = 9806 \ N/m^3$

$d_1 = 1 \ m$

$\Delta p_{12} = 12158 \ Pa$

Calcolare d_2.

Dal teorema di Bernoulli per le correnti:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

Per la conservazione della massa:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{Q}{\pi \frac{d_1^2}{4}}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi \frac{d_2^2}{4}}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{Q^2}{\pi^2 \frac{d_2^4}{16}} \cdot \frac{1}{2g} - \frac{Q^2}{\pi^2 \frac{d_1^4}{16}} \cdot \frac{1}{2g}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g} \left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4}\right)$$

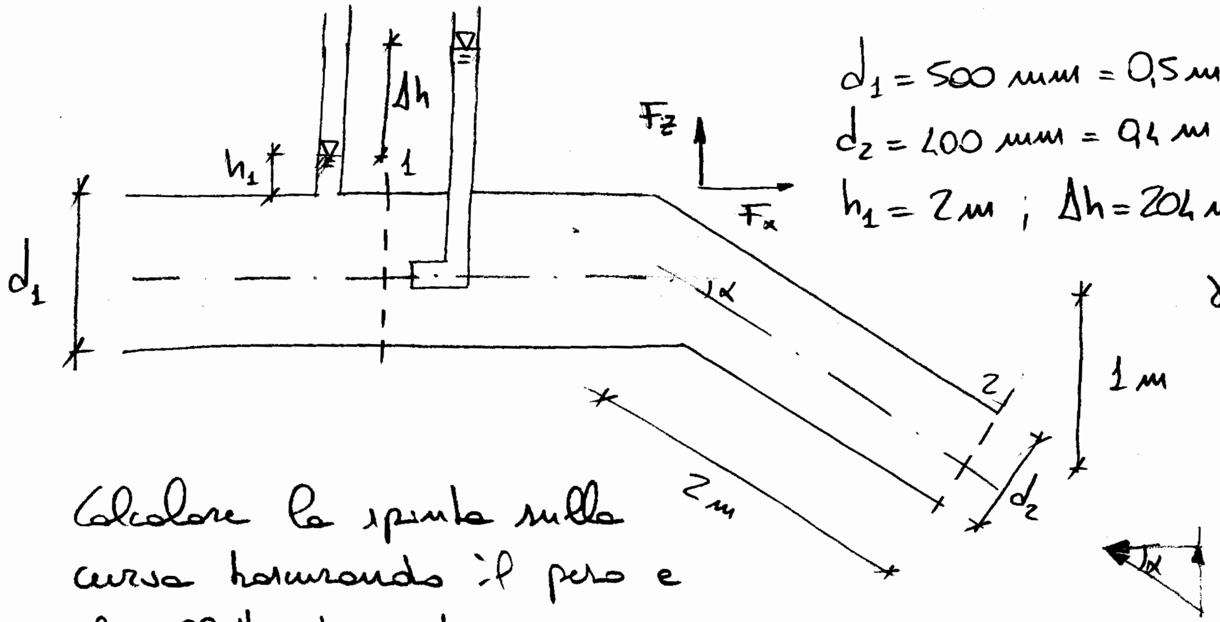
$$\frac{(p_1 - p_2)\pi^2 g}{8 \gamma Q^2} = \frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4}$$

$$\frac{1}{d_2^4} = \frac{1}{d_1^4} + \frac{(P_1 - P_2)\pi^2 g}{8\gamma Q^2}$$

$$d_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{1}{d_1^4} + \frac{(P_1-P_2)\pi^2 g}{8\gamma Q^2}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{1}{1^4} + \frac{12158 \cdot \pi^2 \cdot 9{,}806}{8 \cdot 9806 \cdot 1^2}}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{1}{1 + 14{,}9984}} = 0{,}0625^{1/4} = 0{,}5 \text{ m}$$

n° 4



$d_1 = 500$ mm $= 0{,}5$ m
$d_2 = 400$ mm $= 0{,}4$ m
$h_1 = 2$ m ; $\Delta h = 204$ mm $= 0{,}204$ m
$\gamma = 9806 \frac{N}{m^3}$
$\alpha = \frac{\pi}{6}$

Calcolare la spinta sulla curva trascurando il peso e gli effetti dissipativi.

Per la conservazione della quantità di moto:

$$\underline{G} + \underline{\Pi} = \underline{M}_u - \underline{M}_e + \cancel{\underline{I}}$$

In direzione orizzontale abbiamo

$G_x = 0$

$\Pi_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\alpha - F_x$

$M_u = \rho Q v_2 \cos\alpha$

$M_e = \rho Q v_1$

$A_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} = \pi \cdot \frac{0{,}5^2}{4} = 0{,}1963 \text{ m}^2$

$A_2 = \pi \frac{d_2^2}{4} = \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4} = 0{,}1257 \text{ m}^2$

$$\Rightarrow p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\alpha - F_x = \rho Q^2 \left(\frac{\cos\alpha}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$

Per calcolare la portata sfruttiamo il tubo di Pitot nella sezione 1:

$$v_1 = \sqrt{2g\,\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}204} = 2 \ m/s$$

$$Q = v_1 A_1 = 2 \cdot 0{,}1963 = 0{,}3926 \ m^3/s$$

Per il calcolo delle pressioni sfruttiamo invece il teorema di Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \cancel{z_1} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

sapendo che

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0{,}3926}{0{,}1257} = 3{,}1233 \ m/s$$

$$p_1 = \gamma \left(h_1 + \frac{d_1}{2} \right) = 9806 \, (2 + 0{,}25) = 22063{,}5 \ Pa$$

abbiamo

$$p_2 = \frac{\gamma}{2g} \left(v_1^2 - v_2^2 \right) + p_1 - \gamma z_2$$

$$= \frac{9806}{2 \cdot 9{,}806} \left(2^2 - 3{,}1233^2 \right) + 22063{,}5 + 9806 = 28992 \ Pa$$

In definitiva

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\alpha - \rho Q^2 \left(\frac{\cos\alpha}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right)$$

$$= 22063{,}5 \cdot 0{,}1963 - 28992 \cdot 0{,}1257 \cdot \cos\frac{\pi}{6} - 1000 \cdot 0{,}3926 \left(\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{0{,}1257} - \frac{1}{0{,}1963} \right)$$

$$= 4331 - 3644 - 7049 = -4807 \ N$$

In direzione verticale abbiamo invece:

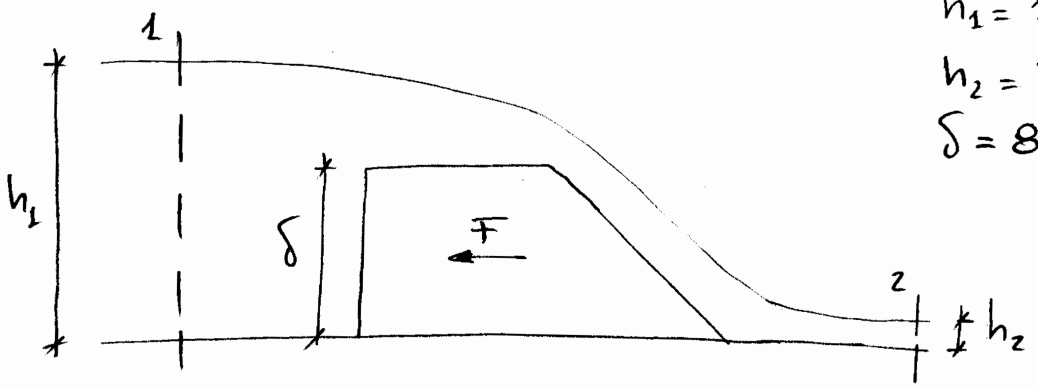
$$\Pi_z = p_2 A_2 \operatorname{sen}\alpha + F_z$$

$$M_v = \rho Q v_2 \operatorname{sen}\alpha$$

$$F_z = \left(\rho Q v_2 - p_2 A_2 \right) \operatorname{sen}\alpha = \left(1000 \cdot 0{,}3926 \cdot 3{,}1233 - 28992 \cdot 0{,}1257 \right) \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= \left(1226 - 3644 \right) \cdot 0{,}5 = -1209 \ N$$

n°5



$h_1 = 1{,}2\ m$

$h_2 = 30\ cm = 0{,}3\ m$

$\delta = 80\ cm = 0{,}8\ m$

Calcolare F.

Per la conservazione della quantità di moto

$$M_u - M_e = \Pi$$

$$\Pi = p_1 \cdot A_1 - p_2 A_2 - F = \gamma \frac{h_1^2}{2} - \gamma \frac{h_2^2}{2} - F$$

$$M_e = \rho Q v_1 = \rho \frac{Q^2}{h_1}$$

$$M_u = \rho Q v_2 = \rho \frac{Q^2}{h_2}$$

Per il teorema di Bernoulli

$$\frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

e per la conservazione della massa

$$v_1 = \frac{Q}{h_1}$$

$$v_2 = \frac{Q}{h_2}$$

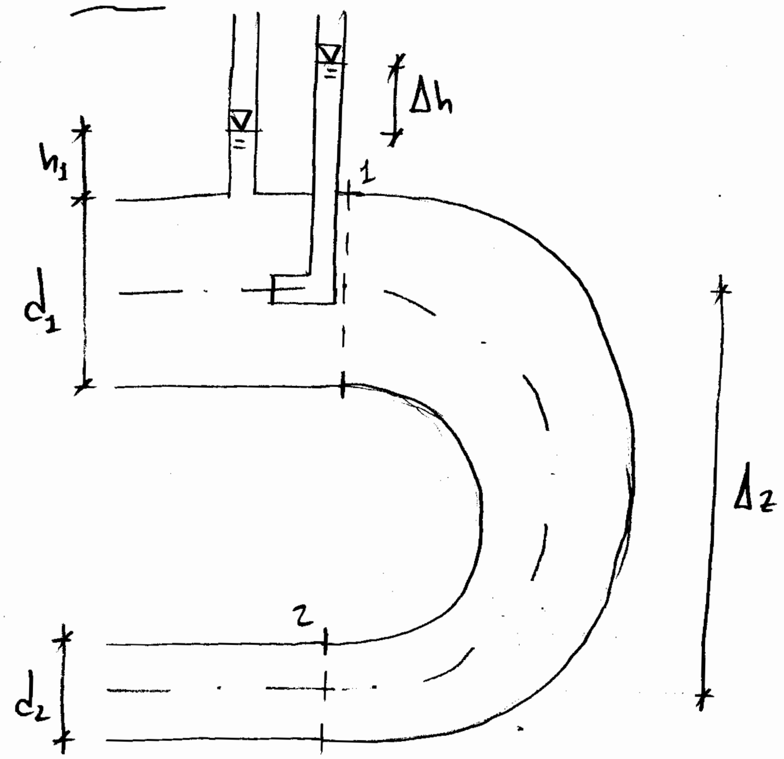
$$\Rightarrow \frac{Q^2}{2g h_1^2} + h_1 = \frac{Q^2}{2g h_2^2} + h_2 \Rightarrow Q = h_1 h_2 \sqrt{\frac{2g}{h_1 + h_2}} = 1{,}302\ m^2/s$$

$$\Rightarrow F = \frac{\gamma}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) + \rho Q^2 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)$$

$$= \frac{9806}{2}\left(1{,}2^2 - 0{,}3^2\right) + 1000 \cdot 1{,}302^2 \left(\frac{1}{1{,}2} - \frac{1}{0{,}3}\right) = 6619 - 4238$$

$$= 2381\ N$$

n°6



$h_1 = 2\,m$

$\Delta h = 51\,mm = 0{,}051\,m$

$\Delta z = 50\,cm = 0{,}5\,m$

$d_1 = 400\,mm = 0{,}4\,m$

$d_2 = 150\,mm = 0{,}15\,m$

Calcolare la spinta orizzontale trascurando le perdite di carico

$$P_1 = \gamma\left(h_1 + \frac{d_1}{2}\right) = 9806 \cdot (2+0{,}2) = 21573\ Pa$$ (calcola h nella sezione)

$$v_1 = \sqrt{2g\,\Delta h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}806 \cdot 0{,}051} = 1\ m/s$$ (tubo di Pitot)

$$Q = v_1 A_1 = v_1 \cdot \pi \cdot \frac{d_1^2}{4} = 1 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4} = 0{,}1257\ m^3/s$$ (conservazione massa)

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{Q}{\pi \frac{d_2^2}{4}} = \frac{0{,}1257}{\pi \cdot \frac{0{,}15^2}{4}} = 7{,}1134\ m/s$$

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2}$$ (Bernoulli)

$$P_2 = P_1 + \gamma\Delta z + \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) =$$
$$= 21573 + 0{,}5 \cdot 9806 + \frac{1000}{2}\left(1^2 - 7{,}1134^2\right) = 1676\ Pa$$

$$\Pi = M_u - M_e$$ (conservazione QdM)

$$P_1 A_1 + P_2 A_2 - F = -\rho Q v_2 - \rho Q v_1$$

$$F = P_1 A_1 + P_2 A_2 + \rho Q (v_2 + v_1)$$
$$= 21573 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}4^2}{4} + 1676 \cdot \pi \cdot \frac{0{,}15^2}{4} - 1000 \cdot 0{,}1257\,(1 + 7{,}1134)$$
$$= 2711 + 30 + 1020 = 3761\ N$$