FLUIDI IDEALI

EQUAZIONE COSTITUTIVA

Consideriamo solo il primo requisito:

$$\overline{\overline{T}} = p\,\overline{\overline{I}}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{T}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} = \nabla p$$

EQUAZIONE di EULERO

Possiamo scrivere l'equazione di conservazione della quantità di moto come:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \frac{1}{\rho}\,\underline{f} - \frac{1}{\rho}\,\nabla p$$

Tale equazione è detta di Eulero e può essere scritta anche come

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{f} - \nabla p\right)$$

È un'equazione differenziale del primo ordine e sarà quindi necessario imporre una condizione al contorno; nel nostro caso imponiamo l'impermeabilità delle pareti:

$$\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$$

Cerchiamo poi una forma alternativa per esprimere l'equazione di Eulero. Consideriamo l'espressione $\underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ dapprima nella sola direzione x:

$$\underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \Big]_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\underline{v}\cdot\nabla\underline{v}\Big|_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + v_y\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) + v_y\,\omega_z - v_z\,\omega_y$$

Ricordando il rotore vorticità:

$$\underline{\omega} = \nabla\times\underline{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{bmatrix}$$

possiamo scrivere, nelle 3 dimensioni,

$$\underline{v}\cdot\nabla\underline{v} = \nabla\frac{\underline{v}^2}{2} + \underline{v}\times\underline{\omega}$$

Abbiamo quindi una forma alternativa per l'eq. di Eulero:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla\frac{\underline{v}^2}{2} + \underline{v}\times\underline{\omega} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{f} - \nabla p\right)$$

Facendo poi il rotore di tale equazione abbiamo

$$\nabla\times\left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}\right) + \nabla\times\nabla\frac{\underline{v}^2}{2} + \nabla\times\left(\underline{v}\times\underline{\omega}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\nabla\times\underline{f} - \nabla\times\nabla p\right)$$

Considerato che il rotore di un gradiente si annulla e che, nell'ipotesi di essere nel solo campo gravitazionale, $\underline{f} = -\nabla(gz)$ possiamo vedere che per i fluidi ideali non abbiamo vorticità a causa della mancanza di attriti alle pareti:

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla\times\left(\underline{v}\times\underline{\omega}\right) = 0$$

Moti irrotazionali...

TEOREMA di BERNOULLI

Il teorema di Bernoulli recita:

"nel moto stazionario di un fluido ideale all'interno del campo gravitazionale l'energia meccanica specifica, o carico totale, del fluido si mantiene costante lungo ogni traiettoria".

Abbiamo quindi 3 ipotesi di partenza:

- la condizione di fluido ideale;
- l'immersione nel campo gravitazionale:

$$\frac{1}{\rho}\underline{f} = -\nabla(gz)$$

- la condizione di moto stazionario:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$$

Inserendo tali ipotesi nell'equazione di Eulero abbiamo:

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = -\underline{v} \times \underline{\omega}$$

Proiettando poi il vettore $\underline{v} \times \underline{\omega}$ lungo la linea di corrente generica esso si annulla ed ho quindi:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

Osserviamo subito che per $\underline{v} = 0$ (idrostatica) abbiamo $h = \text{cost.}$

Definiamo poi il carico totale:

$$H \triangleq z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = h + \frac{v^2}{2g}$$

dove possiamo osservare i tre termini che compongono il trinomio di Bernoulli:

- l'altezza geodetica z, che rappresenta l'energia potenziale specifica;

- l'altezza piezometrica $\frac{p}{\gamma}$, ossia l'altezza della colonna di fluido necessaria per produrre la pressione p, che rappresenta l'energia specifica di pressione;
- l'altezza cinetica $\frac{v^2}{2g}$, ossia l'altezza di caduta libera necessaria a raggiungere la velocità v, che rappresenta l'energia cinetica specifica.

Possiamo anche scrivere il teorema come

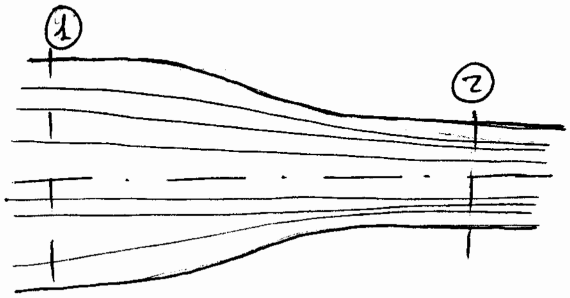
$$\frac{dH}{ds} = 0$$

N.B. Poiché il carico totale rappresenta un'energia per unità di peso, l'energia sarà semplicemente

$$E = \gamma V H$$

APPLICAZIONI

STROZZATURA

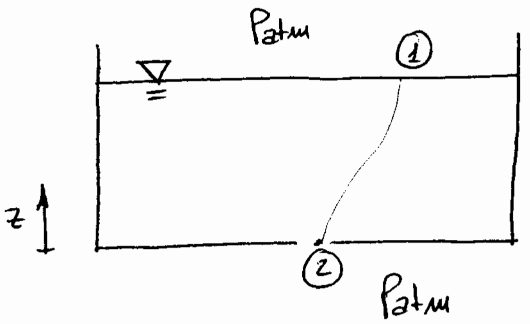


Poiché la portata rimane costante da $v_2 >> v_1$

abbiamo $p_2 << p_1$

poiché $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{cost.}$

EFFLUSSO



Per il teorema ho

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \cancel{z_2} + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

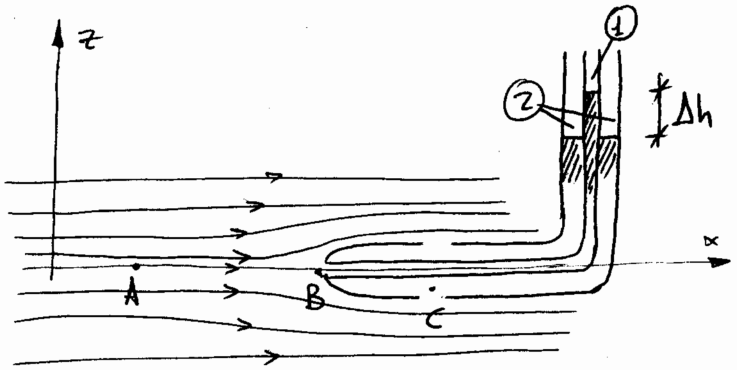
posso trascurare v_1 e quindi

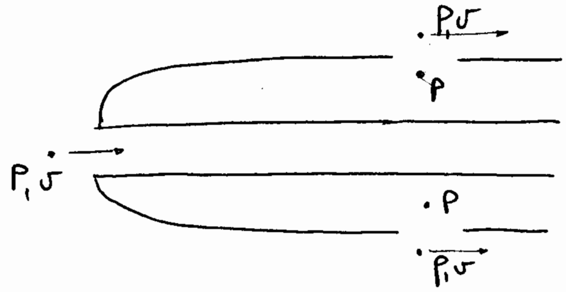
$$v_2 = \sqrt{2g z_1}$$

=> velocità di Torricelli per l'efflusso da un serbatoio

$$v = \sqrt{2gh}$$

TUBO di PITOT – PRANDTL





$$\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \cancel{\frac{v_1^2}{2g}} \Rightarrow h_1 = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{p}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \Rightarrow h_2 = \frac{p}{\gamma}$$

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v = \sqrt{2g\,\Delta h}$$