FLUIDI VISCOSI

Ci limiteremo allo studio dei fluidi Newtoniani, caratterizzati da un valore della viscosità indipendente dagli sforzi e quindi dal moto.

EQUAZIONE di NAVIER-STOKES

L'equazione differenziale di conservazione della quantità di moto è stata scritta come:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \frac{1}{\rho} \left(\underline{f} + \nabla \cdot \overline{\overline{T}} \right)$$

Al fine di determinare il tensore degli sforzi, per i fluidi viscosi è necessario considerare un'equazione costitutiva che risponda ad entrambi i requisiti, e quindi nella forma:

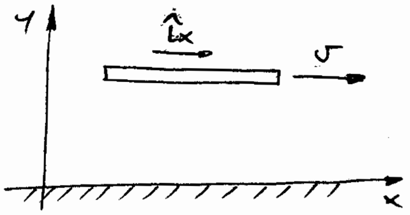
$$\overline{\overline{T}} = p \cdot \overline{\overline{I}} + f(\overline{\overline{D}})$$

Nel caso dei fluidi newtoniani abbiamo l'espressione:

$$\overline{\overline{T}} = p \cdot \overline{\overline{I}} - 2\mu \overline{\overline{D}}$$

A fronte di ciò, determiniamo ora le componenti del vettore

$$\hat{\underline{t}} = \overline{\overline{T}} \cdot \underline{n}$$



Eseguiamo l'analisi dapprima nella sola direzione x, con riferimento alla figura a fianco.

$$\hat{t}_x = \overline{\overline{T}} \cdot \underline{n} \Big]_x = \overline{\overline{T}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg\|_x = \begin{bmatrix} T_{xy} \\ T_{yy} \\ T_{zy} \end{bmatrix} \Bigg\|_x = T_{xy}$$

$$T_{xy} = p \cdot \cancel{\overline{\overline{I}}_{xy}} - 2\mu \, \mathbb{D}_{xy} = -2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} \right) \right]^x = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

Abbiamo inoltre che

$$\nabla \cdot \overline{\overline{T}} = \nabla p - 2\mu \nabla \cdot \overline{\overline{D}}$$

Calcoliamo ora, nella sola direzione x, la divergenza di $\overline{\overline{D}}$:

$$\nabla \cdot \bar{\bar{D}}\Big]_x = \frac{\partial}{\partial x} D_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} D_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} D_{xz}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\nabla^2 v_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\nabla^2 v_x + \cancel{\frac{\partial}{\partial x}\nabla \cdot \underline{v}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\nabla^2 v_x$$

Abbiamo quindi, nelle tre dimensioni:

$$\nabla \cdot \bar{\bar{\Pi}} = \nabla p - \mu \nabla^2 \underline{v}$$

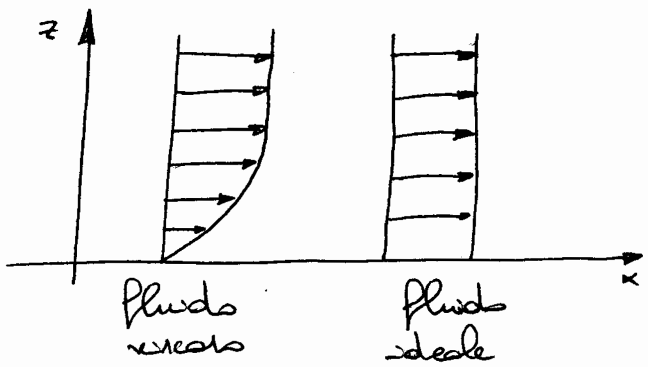
e possiamo così esprimere le equazioni di Navier-Stokes, valide per i fluidi newtoniani:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ \dfrac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \dfrac{1}{\rho}\left(\underline{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v}\right) \end{cases}$$

La seconda è un'equazione del secondo ordine, ed è quindi necessario imporre due condizioni al contorno:

- l'impermeabilità della parete rigida;
- l'aderenza del flusso alla parete rigida.

L'aderenza definisce quindi la differenza tra fluidi ideali e viscosi. Prendiamo ad esempio una velocità che agisce nella sola direzione x:



a causa dell'aderenza ho

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \neq 0$$

e poiché

$$\omega_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}}$$

la vorticità influisce nei fluidi viscosi.

Considerando sempre la seconda equazione, essa può essere espressa nella forma

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{f} - \nabla p\right) + \nu \nabla^2 \underline{v}$$

Facendone il rotore abbiamo l'espressione

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \nabla \times \left(\underline{v} \times \underline{\omega}\right) = \nu \nabla^2 \underline{\omega}$$

dalla quale possiamo affermare che la vorticità si può creare nelle pareti che racchiudono un fluido viscoso; nel mezzo del volume fluido, invece, non abbiamo vorticità.

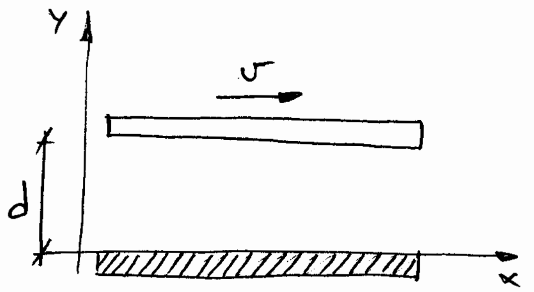
Il termine $\nu \nabla^2 \underline{v}$, dovuto all'attrito con le pareti, è detto dissipazione e rende il processo definito dalle equazioni di Navier-Stokes irreversibile. Il processo descritto dall'equazione di Eulero è invece reversibile, poiché se cambio il segno alla velocità, cambia il segno anche il tempo:

$$v \rightarrow -v \quad \Rightarrow \quad t \rightarrow -t$$

SOLUZIONI

MOTO PIANO ORIZZONTALE

Consideriamo un fluido racchiuso tra una parete fissa e una parete che si muove in direzione x:



Facciamo una prima ipotesi di moto uniforme, ossia $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$, poiché:

- siccome il moto è piano si ha $v_z = 0$;

- la forzante va verso x e d è piccola, quindi possiamo trascurare v_y

L'assunzione di moto piano determina anche $\frac{\partial}{\partial z}=0$.
Un'altra ipotesi è quella di avere unicamente la forza di gravità:

$$\underline{f} = -\nabla \gamma \hat{z}$$

dove $\hat{z}$ è la quota verticale.
Scriviamo quindi l'equazione di Navier-Stokes per ogni direzione:

$$y> \quad \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial x}} + \cancel{v_y} \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial y}} + \cancel{v_z} \cancel{\frac{\partial v_y}{\partial z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(g\hat{z}) + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 v_y}{\partial z}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho} + g\hat{z}\right) = 0$$

$$z> \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho} + g\hat{z}\right) = 0$$

$$x> \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial x}} + \cancel{v_y}\frac{\partial v_x}{\partial y} + \cancel{v_z}\frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial (g\hat{z})}{\partial x} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}\right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + g\hat{z}\right) = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Nelle direzioni y e z l'equazione si riduce alla costanza del carico piezometrico, poiché per le direzioni trasversali al moto siamo in condizioni idrostatiche.
Per quanto riguarda la direzione x facciamo le due ipotesi aggiuntive:

- il movimento del fluido avviene unicamente per il moto della parete superiore e non per differenze di pressione:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + g\hat{z}\right) = 0$$

- il moto è stazionario:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Abbiamo così l'espressione

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0$$

che integrata dà

$$v_x(y) = By + A$$

Inseriamo ora le condizioni al contorno:

$$\begin{cases} v_x(0) = 0 \\ v_x(d) = v \end{cases}$$

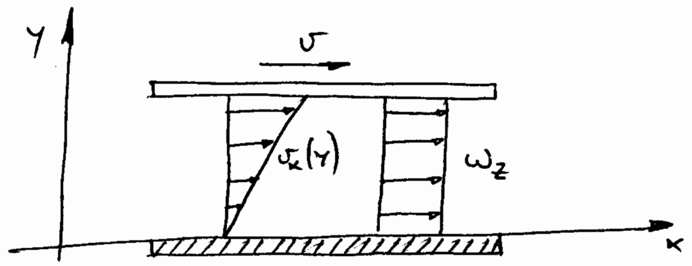
dalle quali abbiamo

$$v_x(y) = v \cdot \frac{y}{d}$$

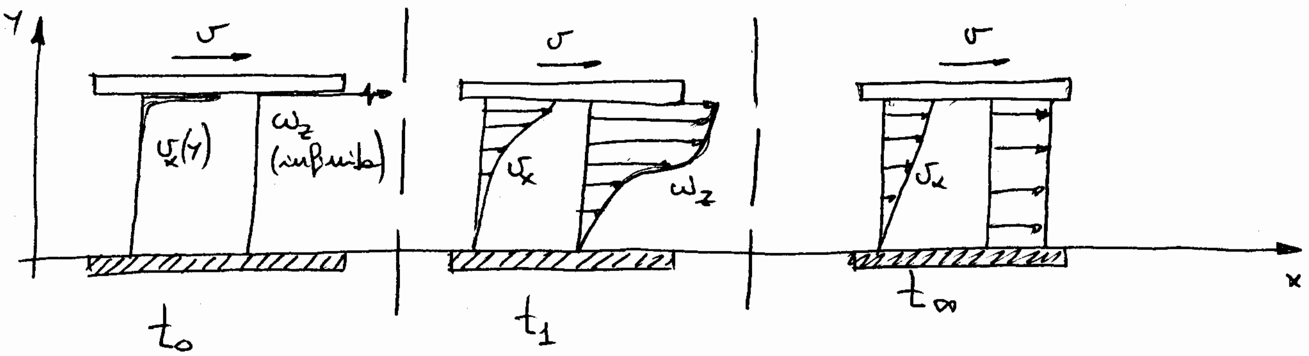
La vorticità sarà poi

$$\omega_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{v}{d}$$

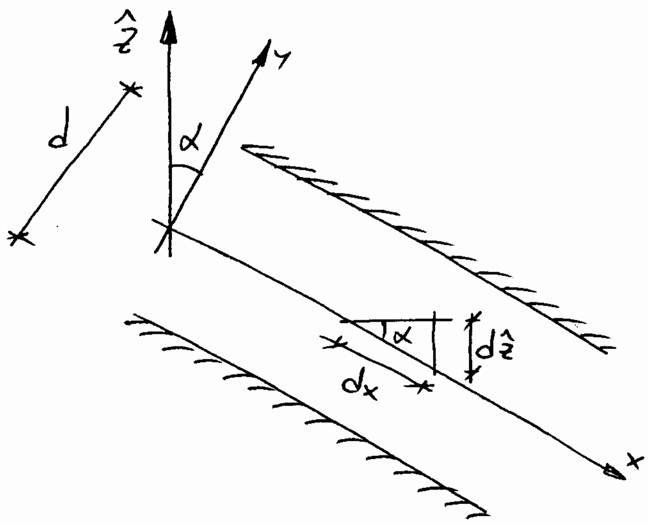
Il profilo di velocità è quindi lineare, mentre il profilo di vorticità è costante:



Nel caso in cui il moto non sia stazionario, ossia $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$, possiamo analizzare la situazione in diversi istanti che vanno dal tempo t_0 con il fluido fermo e la parete che comincia a muoversi a velocità v fino all'istante t_∞ dove il fluido raggiunge la configurazione di moto stazionario:



MOTO PIANO OBLIQUO



Facciamo anche qui le due ipotesi:

- di moto uniforme:

$$v_y \ll v_x \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x(y)$$

- di moto stazionario:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

N.B.: poiché il moto è piano non consideriamo l'asse z.

Scriviamo l'equazione di Navier-Stokes nelle due direzioni:

$$y > \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$x > \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + g\hat{z}\right) = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\nu}{g} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Poiché il termine di destra è funzione della sola y, mentre il termine di sinistra è funzione della sola x possiamo dire che l'equazione non dipende né da x né da y.

Definiamo la pendenza motrice i come

$$i \triangleq -\frac{dh}{dx}$$

Possiamo così osservare che nel moto del fluido la pendenza della corrente ($\operatorname{sen}\alpha$) ha lo stesso ruolo della differenza di potenziale derivante dalla differenza di pressione:

$$i = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma} + \hat{z}\right) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{sen}\alpha$$

Possiamo scrivere l'equazione di Navier-Stokes nella forma:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -\frac{g \cdot i}{\nu}$$

che, per successive integrazioni, diventa:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{g \cdot i}{\nu} y + A$$

$$v_x(y) = -\frac{g \cdot i}{2\nu} y^2 + Ay + B$$

Possiamo quindi applicare le condizioni al contorno

$$\begin{cases} v_x\left(-\frac{d}{2}\right) = 0 \\ v_x\left(\frac{d}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

per ricavare i valori delle costanti di integrazione A e B:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{g \cdot i}{2\nu} \cdot \frac{d^2}{4} + A\frac{d}{2} + B \\ 0 = -\frac{g \cdot i}{2\nu} \frac{d^2}{4} - A\frac{d}{2} + B \end{cases}$$

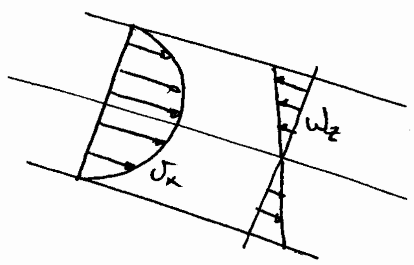
$$\begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{g \cdot i \cdot d^2}{8\nu} \end{cases}$$

Possiamo pertanto esprimere la velocità con la relazione

$$v_x(y) = -\frac{g \cdot i}{2\nu} y^2 + \frac{g \cdot i\, d^2}{8\nu} = \frac{g \cdot i}{2\nu}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

e la vorticità con la relazione

$$\omega_z = \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{g \cdot i}{\nu} y$$

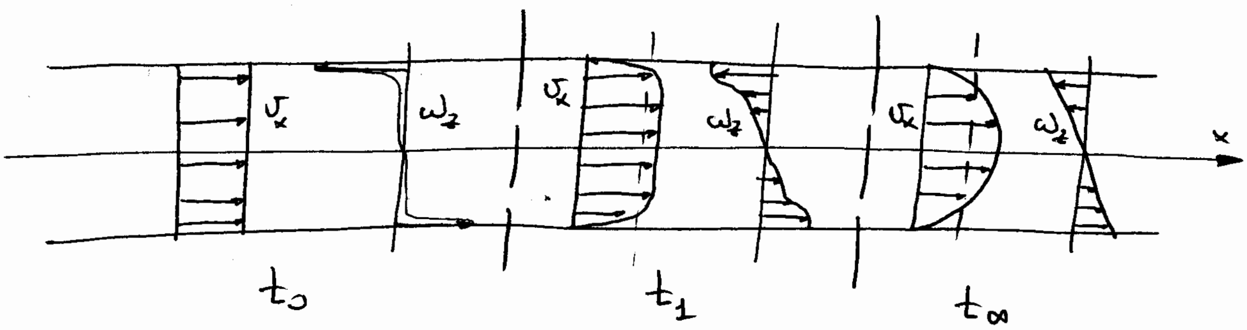


Cerchiamo poi il valore della portata per unità di larghezza:

$$Q = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} v_x \, dy = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \frac{g \cdot i}{2\nu}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) dy = \left[\frac{g \cdot i}{2\nu}\left(\frac{d^2}{4}y - \frac{y^3}{3}\right)\right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}$$

$$= \frac{g \cdot i}{2\nu}\left(2 \cdot \frac{d^3}{8} - 2\,\frac{d^3}{3 \cdot 8}\right) = \frac{g \cdot i}{2\nu} \cdot \frac{2}{3}\,\frac{d^3}{4} = \frac{g \cdot i \cdot d^3}{12\,\nu}$$

Come per la soluzione precedente possiamo analizzare la situazione del moto non stazionario:



N.B. Nel disegno si intende il piano x inclinato.

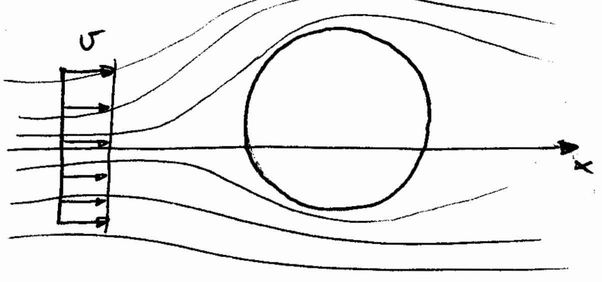
STRATO LIMITE

Lo strato limite è la zona vicina alla parete nella quale il termine viscoso $\nu \nabla^2 \underline{v}$ dell'equazione di Navier-Stokes è comparabile con gli altri termini:

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial (g\hat{z})}{\partial x}\right) + \nu \nabla^2 \underline{v}$$

Allo stesso modo potrei dire che lo strato limite è la zona nella quale ho vorticità.

Consideriamo ad esempio un cilindro investito da una corrente:



$v \sim V$
$x \sim L$ $\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{V}{L}$

$\nu \sim 10^{-6}\, m^2/s$

Posso approssimare con le eq. di Eulero solo lontano dalle pareti, poiché il termine viscoso cambia le condizioni al contorno.