FORMULE e RIASSUNTI - II PROVETTA

CONSERVAZIONE della MASSA

- $\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \, \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = 0 \Rightarrow \int_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS = 0$ H_2O

per correnti: $Q_I = Q_U$

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \underline{v} = 0$

CONSERVAZIONE della QdM

- $\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \underline{v}) dV - \int_S \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS = \int_V \underline{f} \, dV + \int_S \underline{t} \, dS$

$$\underline{I} + \underline{M}_U - \underline{M}_e = \underline{G} + \underline{\Pi}$$

per correnti unidimensionali $\underline{I}_s = \rho \dot{Q} L$; $\underline{M} = \rho \beta Q \underline{v}$

e uniformi $\underline{M} = \rho Q \underline{v}$ con $\beta = \frac{\int v_s^2 dS}{Q v^2}$

- $\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \underline{f} - \nabla \cdot \overline{\overline{\Pi}}$

EQUAZIONE COSTITUTIVA

È necessaria al fine di trovare il tensore degli sforzi.

Dovrò inserire le condizioni:

- in regime idrostatico $\overline{\overline{\Pi}} = p \, \overline{\overline{I}}$
- il tensore dipende dal tasso di deformazione locale all'istante considerato, non da quanto è accaduto al fluido nel passato: $\overline{\overline{\Pi}} = f(\overline{\overline{D}})$

EQUAZIONE di EULERO

L'equazione di Eulero rappresenta l'equazione di conservazione della quantità di moto per i fluidi ideali:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \frac{1}{\rho} (\underline{f} - \nabla p)$$

alla quale dobbiamo imporre la condizione al contorno

di impermeabilità delle pareti: $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$.
Una forma alternativa dell'equazione può essere

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\underline{v}^2}{2} + \underline{v} \times \underline{\omega} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{f} - \nabla p\right)$$

dalla quale possiamo osservare che per i fluidi ideali, a causa dell'assenza di attriti alle pareti, non abbiamo vorticità.

TEOREMA di BERNOULLI

Nel moto stazionario di un fluido ideale che si svolga all'interno del campo gravitazionale l'energia meccanica specifica (o carico totale) del fluido si mantiene costante lungo ogni traiettoria.

Sono molto importanti le 3 ipotesi:

- di fluido ideale
- di immersione nel campo gravitazionale. $\frac{1}{\rho}\underline{f} = -\nabla(g\underline{z})$
- di moto stazionario: $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 0$

Possiamo quindi dire che, da Eulero,

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\underline{z}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{costante}$$

VELOCITÀ di TORRICELLI: $v = \sqrt{2gh}$

TUBO di PITOT: $v = \sqrt{2g\,\Delta h}$

EQUAZIONE di NAVIER-STOKES

Tale equazione rappresenta la conservazione della quantità di moto per i fluidi newtoniani (fluidi con viscosità indipendente dagli sforzi e dal moto). Dall'espressione $\overline{\overline{T}} = p \cdot \overline{\overline{I}} - 2\mu\overline{\overline{D}}$ per l'equazione costitutiva, possiamo esprimere la cons. della QdM come

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = \frac{1}{\rho}\left(\underline{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \underline{v}\right)$$

e dovremo associare a tale equazione le condizioni al contorno:

- di impermeabilità della parete rigida;
- di aderenza del fluido alla parete rigida.

Il termine $\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\underline{v} = \nu\nabla^2\underline{v}$ è detto dissipazione e rende il processo irreversibile creando vorticità alle pareti.

MOTO PIANO ORIZZONTALE

Ipotesi:

- moto uniforme $\frac{\partial v_x}{\partial x}=0$
- moto piano $v_z=0 \Rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial z}=0$
- traslazione v_y
- immersione nel campo gravitazionale $\underline{f}=-\nabla\gamma\hat{\underline{z}}$

$\Rightarrow$ costante del carico piezometrico per direzioni y e z

$$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}+g\hat{z}\right)=\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

ipotesi aggiuntive:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P}{\rho}+g\hat{z}\right)=0 \qquad \text{(assenza di diff. di pressione)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \qquad \text{(moto stazionario)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=0 \Rightarrow v_x(y)=By+A$$

$$v_x(0)=0 \qquad \Rightarrow v_x(y)=v\cdot\frac{y}{d}$$

$$v_x(d)=v \qquad \text{(lineare)}$$

$$\omega_z=\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{v}{d} \quad \text{(costante)}$$

MOTO PIANO OBLIQUO

Stesse ipotesi di partenza

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\nu}{g}\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

$$i=-\frac{dh}{dx}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial x}+\operatorname{sen}\alpha \quad \text{(pendenza motrice)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=-\frac{g\cdot i}{\nu}$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad v_x(y) = \frac{g \cdot i}{2\nu}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$

$$\omega_z = -\frac{g \cdot i}{\nu} y$$

$$Q' = \frac{g \cdot i \cdot d^3}{12\nu}$$

CORRENTI

- carico piezometrico costante in direzione trasversale alla corrente
- $Q = v \cdot A$ (portata volumetrica)

  $v = \frac{Q}{A}$ (velocità media)

  $M = \rho \beta v Q$ (flusso della quantità di moto)

  $\beta = A \frac{\int_A v_x^2 dA}{\left(\int_A v_x dA\right)^2}$ (coeff. di ragguaglio)

BERNOULLI per CORRENTI

$$dP = \gamma H dA \frac{dx}{dt} = \gamma H dQ$$

$$P = \int_Q \gamma H dQ$$

$\Rightarrow$ la potenza rimane costante in tutte le successive sezioni trasversali

$$P = \gamma h Q + P_c = \gamma h Q + \frac{\rho}{2} \alpha Q v^2 = \gamma Q \overline{H}$$

VENTURIMETRO

$$Q = \frac{A_1 \cdot A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta} = c_q \sqrt{2g \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \Delta}$$

PERDITE di CARICO

$$H_1 = H_2 + \Delta H$$

brusco allargamento: $\Delta H = \begin{cases} \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ \frac{v_2^2}{2g}\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \end{cases}$

brusco restringimento: $\Delta H = \xi \frac{v^2}{2g}$