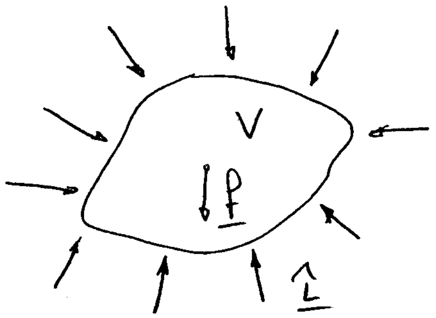
IDROSTATICA

L'idrostatica descrive le proprietà dei fluidi in condizioni statiche, ossia quando $w = 0$

EQUAZIONE dell' IDROSTATICA



Consideriamo un generico volume V in condizioni statiche, ossia in equilibrio. In tal caso la somma delle forze di volume (ad esempio la gravità) e delle forze di superficie (ad esempio la pressione) deve essere nulla:

$$\sum F = 0$$

Definite
- la forza di superficie $\hat{\underline{t}} = p \cdot \underline{n}$, dove p è la pressione ed $\underline{n}$ è il versore normale alla superficie;
- la forza peso $\underline{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix}$

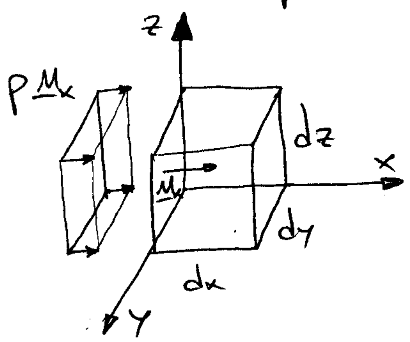
abbiamo l'equazione idrostatica in forma integrale:

$$\int_V \underline{f}\, dV + \int_S \hat{\underline{t}}\, dS = 0$$

$$\int_V -\gamma\, \underline{n}_z\, dV + \int_S p\, \underline{n}\, dS = 0$$

$$\underline{G} + \hat{\underline{\Pi}} = 0$$

Consideriamo poi un volume elementare dV



L'equilibrio nella direzione x può essere scritto come

$$f_x \, dV + \left[p \, dA - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dA \right] = 0$$

$$f_x \, dx dy dz + p \, dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = 0$$

$$f_x = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Estendendo poi l'analisi alle altre dimensioni avremo l'equazione di equilibrio:

$$\underline{f} = \nabla p$$

Nell'ipotesi che la sola forza di volume sia la forza peso, poiché essa è conservativa possiamo scrivere

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial}{\partial x} \gamma z \\ -\frac{\partial}{\partial y} \gamma z \\ -\frac{\partial}{\partial z} \gamma z \end{bmatrix} = \nabla(-\gamma z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma \end{bmatrix}$$

e giungiamo così all'equazione idrostatica in forma differenziale:

$$\nabla(-\gamma z) = \nabla p \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0}$$

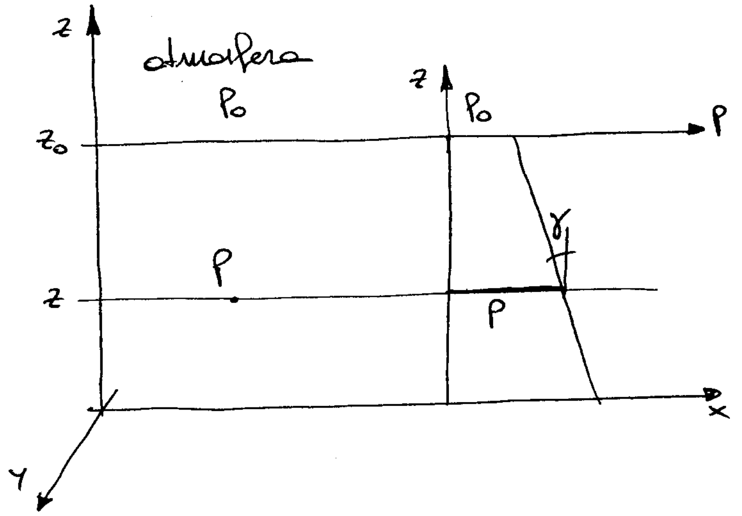
LEGGE di STEVINO

Definiamo il carico piezometrico h come

$$h \triangleq z + \frac{p}{\gamma}$$

ed osserviamo che ha le dimensioni di una lunghezza.
Dall'equazione dell'idrostatica sappiamo che h è costante all'interno di uno stesso volume fluido: un altro modo di esprimere il concetto è quello di dire che, all'interno di uno

stesso volume fluido, a variazioni di z corrispondono variazioni di p:



Con riferimento alla figura:

- sulla superficie libera $(z = z_0)$ abbiamo

$$h = z_0 + \frac{p_0}{\gamma}$$

- sulla superficie a profondità z abbiamo

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

Poiché $h =$ costante, possiamo osservare che la pressione varia linearmente con la profondità:

$$z + \frac{p}{\gamma} = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} \Rightarrow \boxed{p = p_0 + \gamma (z_0 - z)}$$

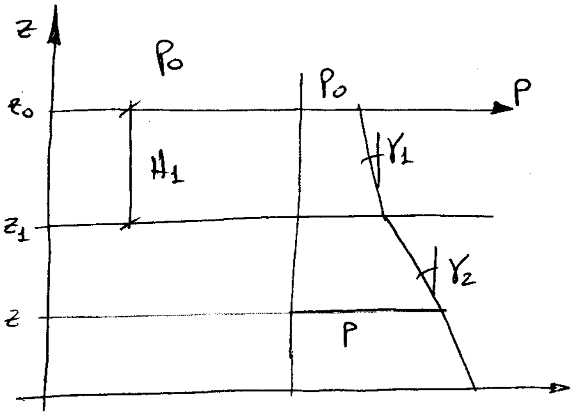
Possiamo esprimere la pressione in funzione dell'affondamento:

$$\xi = (z - z_0) \Rightarrow \boxed{p = p_0 + \xi \gamma}$$

Nel caso di due fluidi diversi osserviamo che:

- all'interno di uno stesso volume fluido il carico piezometrico è costante, e quindi la pressione varia linearmente;
- nella zona di transizione tra un fluido e l'altro, assumiamo che la pressione varii linearmente e con continuità;

ossia non ci sono salti nel valore della pressione.
Considerato che il fluido più vicino alla superficie libera sarà quello con il peso specifico minore, abbiamo:

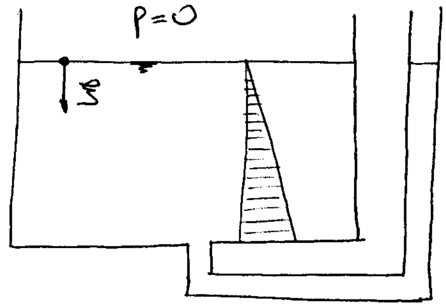


$$p = p_0 + \gamma_1 H_1 + \gamma_2 (z_1 - z)$$

Ricapitolando:

- la pressione è uno scalare;
- la forza provocata dalla pressione applicata ad una superficie:
  - ha direzione dipendente dall'orientamento della superficie;
  - ha modulo dipendente dalla pressione.

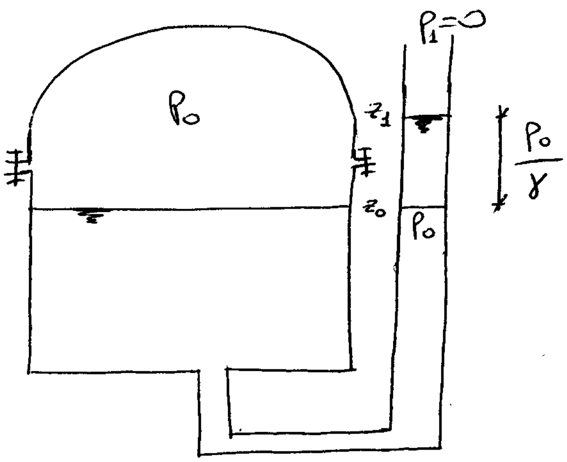
ESEMPIO: BACINO



Supponiamo nulla la pressione atmosferica (semplificazione sempre possibile):

$$p = \gamma \xi$$

ESEMPIO: SERBATOIO CHIUSO



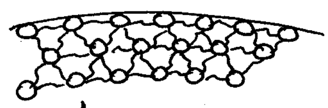
Poiché il fluido è sempre lo stesso:

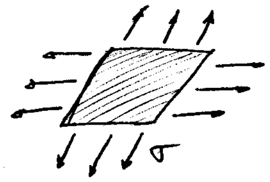
$$\begin{cases} h_0 = h_1 \Rightarrow \dfrac{p_0}{\gamma} + z_0 = \dfrac{p_1}{\gamma} + z_1 \\ p_0 = \gamma (z_1 - z_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z_1 = z_0 + \frac{p_0}{\gamma}$$

TENSIONE SUPERFICIALE

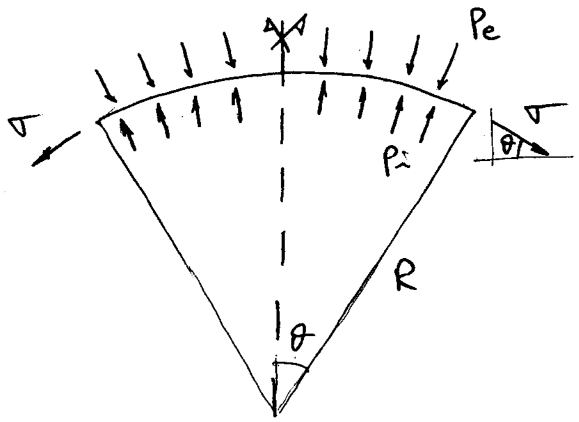
Abbiamo assunto la pressione come continua nel passaggio tra un fluido e l'altro: la differenza di pressione tra aria ed acqua è in realtà trascurabile, ma non nulla, a causa del fenomeno della tensione superficiale.





Tale fenomeno è dato dal fatto che le molecole costituenti il fluido instaurano, sulla superficie, legami intermolecolari con molecole dello stesso fluido solo da una parte. I legami con le molecole di un fluido diverso sono, infatti, molto meno forti. Ciò comporta uno sbilanciamento delle attrazioni tra le molecole, che si manifesta con una tensione della superficie dell'acqua.

Analizziamo prima il problema in due dimensioni, scrivendo l'equilibrio per le forze verticali:



$$2\sigma \operatorname{sen}\theta + \int_{-\theta}^{\theta} (P_e - P_i)\cos\varphi\, R\, d\varphi = 0$$

$$2\sigma \operatorname{sen}\theta + 2(P_e - P_i) R \operatorname{sen}\theta = 0$$

$$P_i - P_e = \frac{\sigma}{R}$$

Nel caso generale, in tre dimensioni, ho la legge

$$\boxed{P_i - P_e = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}$$

dove R_1 ed R_2 sono i raggi di curvatura nelle due direzioni.
Nel caso di una sfera (ad esempio per le bolle di sapone) ho la legge di Laplace:

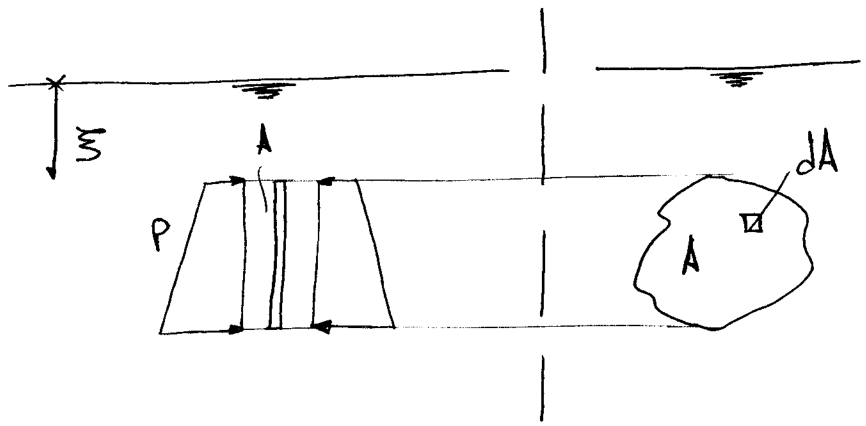
$$P_i - P_e = \frac{2\sigma}{R}$$

In tutte le applicazioni di questo corso, comunque, potremo assumere R molto grande e σ molto piccolo, in modo da avere $p_i = p_e$.

FORZE AGENTI sulle SUPERFICI

1. SUPERFICI PIANE VERTICALI

Consideriamo una superficie piana verticale in equilibrio non affiorante:



Cerchiamo prima la forza agente su di una faccia:

$$F = \int_A p\,dA = \int_A p_0\,dA + \int_A \gamma\,\xi\,dA = p_0 \cdot A + \gamma \int_A \xi\,dA$$

$$= p_0 A + \gamma \cdot \xi_G \cdot A = (p_0 + \gamma\,\xi_G)\,A = p_G \cdot A$$

dove $\xi_G = \int_A \xi\,dA$ è la coordinata di affondamento del baricentro della superficie e p_G è la pressione del baricentro.

Il momento sarà invece dato dall'espressione

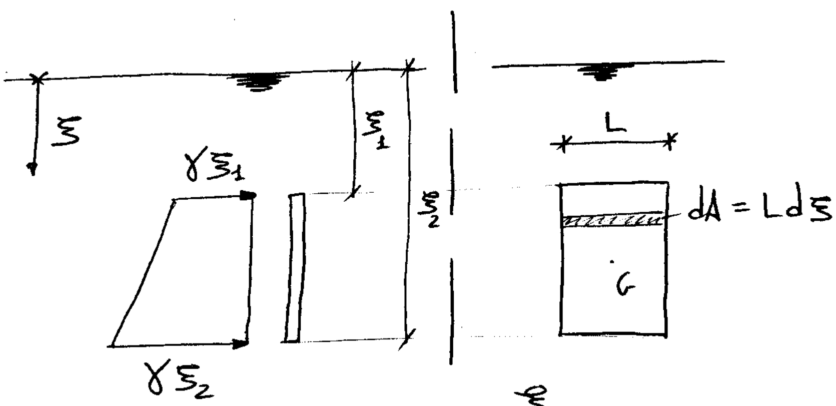
$$M = \int_A p\,\xi\,dA = \gamma \int_A \xi^2\,dA$$

$$= F \cdot \xi_C = \gamma\,\xi_G\,\xi_C \cdot A$$

dove ξ_C è l'affondamento del punto di applicazione della forza e può essere facilmente calcolato con l'espressione.

$$\xi_C = \frac{1}{A\,\xi_G}\int_A \xi^2\, dA = \frac{\int_A \xi^2\, dA}{\int_A \xi\, dA}$$

Nel caso particolare di superfici rettangolari ho:

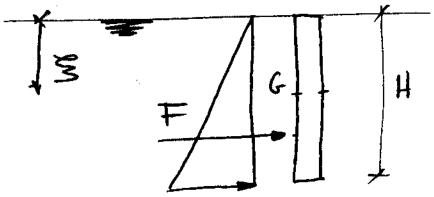


$$\xi_G = \frac{1}{L(\xi_2-\xi_1)}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi L\, d\xi = \frac{\xi_2^2-\xi_1^2}{2(\xi_2-\xi_1)} = \frac{\xi_2+\xi_1}{2}$$

$$F = A(p_0 + \gamma\,\xi_G) = L(\xi_2-\xi_1)\left[p_0 + \gamma\,\frac{\xi_1+\xi_2}{2}\right]$$

$$\int_A \xi^2\, dA = \int_{\xi_1}^{\xi_2} L\xi^2\, d\xi = \frac{\xi_2^3-\xi_1^3}{3}L \implies \xi_C = \frac{2}{3}\,\frac{\xi_2^3-\xi_1^3}{\xi_2^2-\xi_1^2}$$

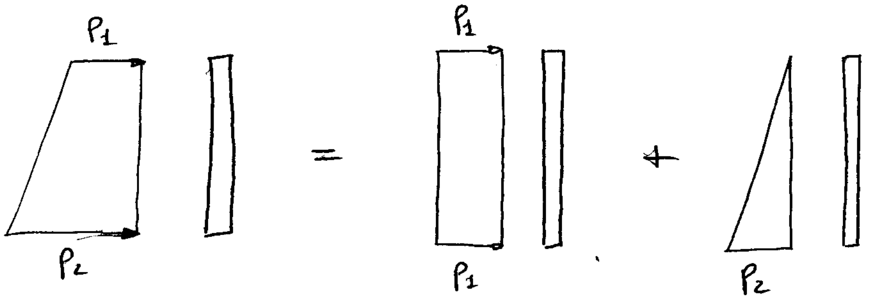
Nel caso particolare di superfici rettangolari affioranti ho:



$$F = \gamma\cdot\frac{H}{2}\cdot H\cdot L = \gamma\,\frac{H^2 L}{2}$$

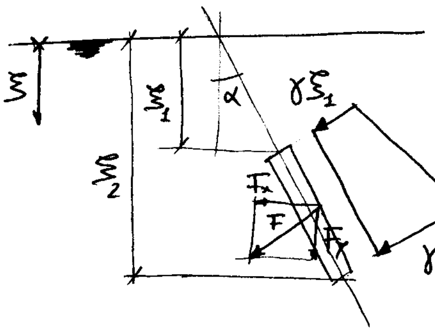
$$\xi_C = \frac{2}{3}H$$

Un modo talvolta utile di calcolare i momenti e le forze è quello di scomporre il problema:



2. SUPERFICI PIANE INCLINATE

L'analisi per le superfici piane inclinate non cambia rispetto a quella svolta per le superfici verticali:

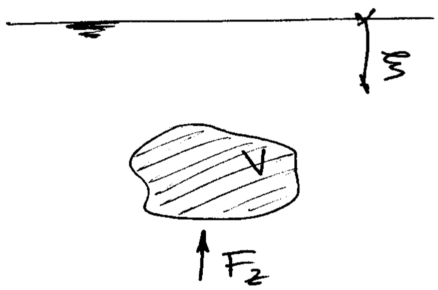


$$F = \int_A p\, dA = \gamma \int_A \xi\, dA = \gamma\, \xi_G A = p_G A$$

$$\begin{cases} F_x = F \cos\alpha \\ F_z = F \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

3. SUPERFICI CURVE CHIUSE

Come è noto dalla fisica, per tali superfici basta semplicemente applicare il principio di Archimede:



$$\underline{G} + \underline{\Pi} = 0$$

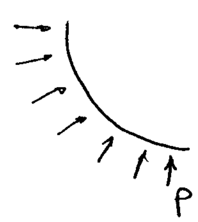
$$G_z = -\gamma V$$

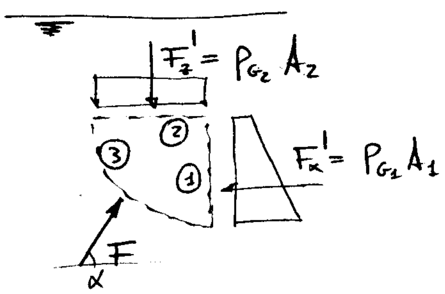
$$\Pi_z = F_z$$

$$\Rightarrow \quad F_z = \gamma V$$

4. SUPERFICI CURVE APERTE

Per tali superfici potrei procedere con l'integrazione della pressione sulla superficie, ma la cosa risulta difficile nella maggior parte delle situazioni. È quindi preferibile isolare opportunamente un volume vicino alla superficie e scriverne l'equilibrio:





$$\underline{F} = \int_A p\, \underline{n}\, dA$$

$$F = p_{G1} A_1 \operatorname{sen}\alpha + \left(p_{G2} A_2 + \gamma V\right) \cos\alpha$$

L'equilibrio dice infatti:

$$G_x + \Pi_{1x} + \Pi_{2x} + \Pi_{3x} = 0 \Rightarrow 0 - p_{G1} A_1 + 0 + F_x = 0$$

$$G_z + \Pi_{1z} + \Pi_{2z} + \Pi_{3z} = 0 \Rightarrow -\gamma V + 0 - p_{G2} A_2 + F_z = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = p_{G1} A_1 \\ F_z = p_{G2} A_2 + \gamma V \end{cases} \qquad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

N.B.: La scelta del volume non è vincolante ai fini del risultato, ma scegliere un volume non opportuno può portare a grandi difficoltà nel calcolo.