# FENOMENI di TRASPORTO

L'analisi dei fenomeni di trasporto è fondamentale per quantificare la qualità dell'aria e dell'acqua nei confronti dell'inquinamento.

Nei corpi idrici possiamo avere il trasporto di
- gas disciolti (ossigeno, ...);
- nutrienti (fosforo, nitrogeni, ...) che solitamente arrivano nei laghi o nei mari dalle acque di irrigazione;
- sali, importanti da studiare per il rilascio della salamoia ottenuta dalla desalinizzazione dell'acqua;
- temperatura
- sospensioni solide
- specie biologiche
- contaminanti chimici

Nelle masse d'aria si studia invece il trasporto delle sospensioni solide PM2.5 - PM10, pericolosi per la salute in quanto si depositano nei polmoni.

Il fenomeno del trasporto avviene mediante i meccanismi:
- advezione (moto medio del fluido)
- convezione (instabilità idrostatiche)
- diffusione molecolare (moto browniano - trasporto downgradient)
- diffusione turbolenta
- shear (variazione di advezione con $\frac{\partial U}{\partial z} \neq 0$)
- dispersione (shear + diffusione).

Possiamo definire le grandezze:
- concentrazione in massa $C$: quantità della sostanza disciolta in un fluido, espressa in mg/l
- pura concentrazione $C^*$: rapporto tra massa disciolta e totale

Abbiamo la relazione $C = \rho C^*$

La densità totale del sistema è data da

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 \sim \rho_2 \quad \text{con} \quad \begin{cases} \rho_1: \text{densità della fase dispersa} \\ \rho_2: \text{densità della fase fluida} \end{cases}$$

## Advezione

L'advezione è il meccanismo di trasporto dovuto al moto medio del flusso.

Possiamo definire il tempo advettivo come

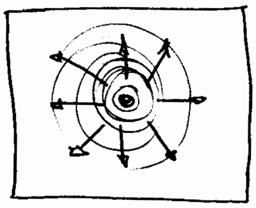
$$t = \frac{L}{v}$$


Il flusso advettivo, ossia il trasporto di una quantità in di una superficie unitaria in un tempo unitario, è dato da

$$\bar{A} = \rho_1 \bar{v} = \begin{cases} \rho_1 v_x \\ \rho_1 v_y \\ \rho_1 v_z \end{cases}$$

## Diffusione molecolare

La diffusione molecolare è il fenomeno di trasporto dovuto al moto caotico delle molecole, detto moto browniano.



Per la diffusione molecolare

- non abbiamo spostamenti del centro di massa (come nel moto advettivo)
- abbiamo un trasporto "downgradient", ossia da concentrazioni maggiori a minori.

Il flusso diffusivo è dato da

$$\bar{F}_1 = -k\,\bar{\nabla}\mu_c$$

con $\mu_c$: potenziale elettrochimico $(\mu_c = f(\theta, p, \rho_1))$

$k$: diffusività molecolare

Il segno $-$ tiene conto del downgradient.

Per la componente $x$ abbiamo:

termine preponderante

$$F_{1x} = -k\frac{\partial \mu_c}{\partial x} = -k\left[\frac{\partial \mu_c}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \mu_c}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \mu_c}{\partial \rho_1}\cdot\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right]$$

$$\cong -k\frac{\partial \rho_1}{\partial x}$$

Possiamo così scrivere la Legge di Fick:

$$\bar{F} = -k\,\bar{\nabla}\rho_1$$

La diffusività molecolare può essere stimata in funzione del numero di Schmidt:

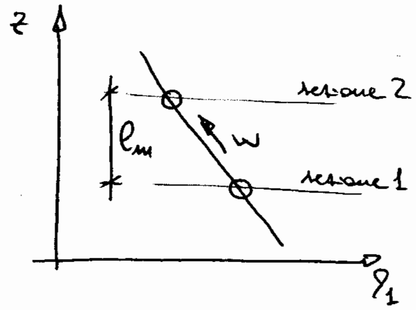
$$k_S \sim \frac{\nu}{Sc}$$

Ovviamente dall'analisi dimensionale

$$k = \left[\frac{m^2}{s}\right] = \left[m \cdot \frac{m}{s}\right]$$

lunghezza media di mescolamento · velocità media di mescolam.

In un flusso stratificato, il flusso sarà




$$F = w\left[\rho_1\big|_1 - \rho_1\big|_2\right]$$

con $\rho_1\big|_1 - \rho_1\big|_2 = -\dfrac{\partial \rho_1}{\partial z}\ell_m$

$$\Rightarrow -w\,\ell_m \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = -k\frac{\partial \rho_1}{\partial z}$$

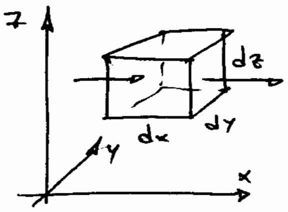
$$\Rightarrow k = w \cdot \ell_m$$ (come volevasi dimostrare!)

## Equazione di advezione-diffusione

Considerando sia l'avvezione che la diffusione, il flusso totale attraverso una faccia del volume di controllo è:

$$\overline{N}_1 = \rho_1 \overline{v} + \overline{F}_1 = \rho_1 \overline{v} - k\,\overline{\nabla}\rho_1$$

Da ciò possiamo passare al bilancio: la variazione nel tempo




della massa nella fase 1 è pari alla somma:
- del flusso di massa della fase 1 attraverso la faccia del volume;
- dei termini di produzione o distruzione.

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} dV \rho_1 = dV\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

$$N_{1x}\,dx dy - \left[N_{1x} + \frac{\partial N_{1x}}{\partial x}dx\right]dy dz + \dots + R\,dV = dV\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$

$$dV\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}N_{1x}\,dV - \frac{\partial}{\partial y}N_{1y}\,dV - \frac{\partial}{\partial z}N_{1z}\,dV + R\,dV$$

ottenendo così l'equazione del trasporto della fase 1:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\frac{\partial N_{1x}}{\partial x} - \frac{\partial N_{1y}}{\partial y} - \frac{\partial N_{1z}}{\partial z} + R$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial N_{1i}}{\partial x_i} = R$$

Esplicitando abbiamo:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho_1 \overline{v_j} - k \frac{\partial \rho_1}{\partial x_j}\right) = R$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \overline{v_j}\,\frac{\partial \rho_1}{\partial x_j} = k\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_j \partial x_j} + R$$

$$\frac{D\rho_1}{Dt} = k\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_j \partial x_j} + R$$

Abbiamo così trovato l'equazione di avvezione-diffusione.

Quando il sistema è bifase, all'aumento di una fase segue la diminuzione dell'altra:

$$\left.\begin{aligned}\frac{D\rho_1}{Dt} &= k_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_j \partial x_j} + R_1\\ \frac{D\rho_2}{Dt} &= k_2 \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x_j \partial x_j} + R_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_j R_j = 0$$

Diffusione turbolenta

Ponendo $\rho_1 = C_1^* \rho$ abbiamo

$$\frac{DC_1^*}{Dt} = k_1 \frac{\partial^2 C_1^*}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{R_1}{\rho}$$

Quando il flusso è turbolento possiamo scrivere le fluttuazioni:

$$\begin{aligned}\vec{V} &= \overline{\vec{V}} + \vec{v}\\ C_1^* &= \overline{C_1^*} + c_1\end{aligned} \Rightarrow \frac{D\overline{C_1^*}}{Dt} = k_1 \frac{\partial^2 \overline{C_1^*}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial\, \overline{v_j C_1^*}}{\partial x_j}$$

I termini $\overline{v_j C_1^*}$ rappresentano la diffusione turbolenta:

$$\overline{v_j C_1^*} = -k_T \frac{\partial \overline{c^*}}{\partial x_j}$$

e possono essere visti come l'equivalente della viscosità turbolenta $\nu_T$.

Possiamo così definire il numero di Schmidt turbolento

$$Sc_T = \frac{\nu_T}{k_T}$$

che, in condizioni neutre, sarà pari a 1.

Effetto della stratificazione

Quando la concentrazione della fase dispersa è sufficientemente bassa, possiamo pensare che non provochi stratificazione.

Quando invece la concentrazione è alta, dobbiamo considerare l'effetto della stratificazione nel campo di moto.

Le equazioni del campo di moto sono

$$\begin{cases} \dfrac{D\overline{V}}{Dt} = \nu_T \dfrac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x_j \partial x_j} \\[2ex] \dfrac{D\overline{C^*}}{Dt} = \dfrac{\nu_T}{Sc_T} \dfrac{\partial^2 \overline{C^*}}{\partial x_j \partial x_j} + \dfrac{R}{\rho} \end{cases}$$

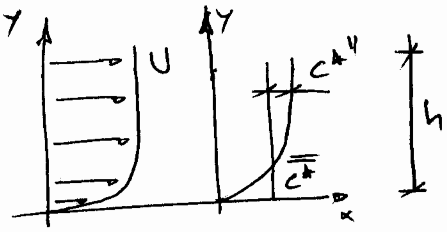
Se non teniamo conto del feedback delle basse concentrazioni sul campo di moto, la seconda equazione si dice scalare passivo.

Quando invece la concentrazione è tale da cambiare la densità totale del fluido, che diventa $\rho = \rho_0 + \rho(z)$, lo scalare si dice attivo e bisogna tener conto della quantità $\frac{g}{\rho_0} \cdot \rho'$.

## Equazione della dispersione

Taylor ha cercato di mediare le equazioni del campo di moto dispersivo (diffusione-advezione).

L'idea è quella di mediare le equazioni nella direzione normale alla parete, definendo un $\overline{\overline{C^*}}$:




$$\overline{\overline{C^*}} = \frac{1}{h}\int_0^h C^*(y)\,dy \Rightarrow C^* = \overline{\overline{C^*}} + c^{*''}$$

$$\overline{\overline{U}} = \frac{1}{h}\int_0^h U(y)\,dy \Rightarrow U = \overline{\overline{U}} + U''$$

Abbiamo così

$$\frac{\partial(\overline{\overline{C^*}} + c^{*''})}{\partial t} + \left(\overline{\overline{U}}_j + u_j''\right)\frac{\partial(\overline{\overline{C^*}} + c^{*''})}{\partial x_j} = k_T\left[\cancel{\frac{\partial^2(\overline{\overline{C^*}} + c^{*''})}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2(\overline{\overline{C^*}} + c^{*''})}{\partial y^2}\right]$$

Facendo la media, ossia integrando e moltiplicando per $\frac{1}{h}$, si ha

$$\frac{\partial \overline{\overline{C^*}}}{\partial t} + \overline{\overline{U}}_j \frac{\partial \overline{\overline{C^*}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\overline{U_j'' C^{*''}}}}{\partial x_j} = \frac{1}{\partial y}\int_0^h k_T \frac{\partial(\overline{\overline{C^*}} + c^{*''})}{\partial y}\,dy$$

Supponendo che la concentrazione sia nulla in superficie e sul fondo il secondo termine si annulla.

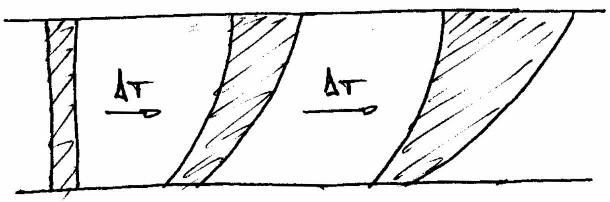
Abbiamo così

$$\frac{\partial \overline{\overline{C^*}}}{\partial t} + \overline{\overline{U_j}} \frac{\partial \overline{\overline{C^*}}}{\partial x_j} = - \frac{\partial \overline{\overline{U'' C^{*''}}}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( E_L \frac{\partial \overline{\overline{C^*}}}{\partial x} \right)$$

con $E_L$: coefficiente di dispersione longitudinale

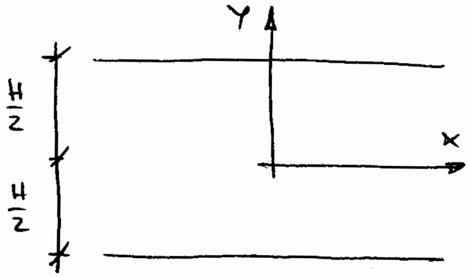
Il coefficiente di dispersione ~~...~~ è stato introdotto poiché si è notato che le variazioni della velocità lungo x sono inferiori a quelle lungo y.

Risolvere l'equazione della dispersione significa considerare il solo allungamento della zona di dispersione, non l'effettiva distribuzione delle concentrazioni:




## Tracciante in fluido fermo

Supponiamo che in un canale di area A sia presente un tracciante fortemente concentrato su $x=0$ per $t=0$.
Supponiamo inoltre che il fluido sia fermo.




All'istante $t=t_1$ la massa di tracciante sarà pari a

$$M = \frac{C^* dx}{\delta(x-x_1)}$$

ed avremo, per $C^*$, l'espressione

$$\frac{\partial C^*}{\partial t} + \cancel{u_j \frac{\partial C^*}{\partial x_j}} = k \frac{\partial^2 C^*}{\partial x_j \partial x_j}$$

con $u_j = 0$

Tale espressione ammette la soluzione

$$C^* = \frac{B}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

Possiamo calcolare il valore della costante B a partire dalla

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho c^* A \, dx = \rho A \int_{-\infty}^{+\infty} c^* dx$$

ed abbiamo così

$$c^* = \frac{M}{2\rho A \sqrt{\pi k t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)$$

Alcune osservazioni:

- per $t$ = costante abbiamo una gaussiana simmetrica per $x=0$;
- per $t$ = costante e $x$ = costante l'equazione dipende solo da $k$: per $k$ crescenti, la concentrazione cresce.

## Tracciante in fluido in moto

Nel caso di fluido in moto l'espressione per $c^*$ è

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} + u_j \frac{\partial c^*}{\partial x_j} = E_L \frac{\partial^2 c^*}{\partial x_j \partial x_j}$$

ed abbiamo la soluzione

$$c^* = \frac{M}{2\rho A \sqrt{\pi E_L t}} \exp\left(-\frac{(x-Ut)^2}{4E_L t}\right)$$