

UNIVERSITÀ degli STUDI di TRIESTE



Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Ambientale e del Territorio

Corso di  
IDROLOGIA TECNICA

(prof. ing. E. Caroni)

Appunti di  
IDROLOGIA TECNICA

\*\*\* *Andrea Lisjak* \*\*\*

`andrea.lisjak@poste.it`

Muggia, 19 gennaio 2007



# Indice

<b>1</b>	<b>Idrologia e misure idrauliche</b>	<b>1</b>
1.1	Ciclo idrologico . . . . .	1
1.1.1	Bilancio idrologico . . . . .	2
1.2	Bacini imbriferi . . . . .	4
1.2.1	Delimitazione del bacino imbrifero . . . . .	4
1.3	Processi idrologici fondamentali . . . . .	6
1.3.1	Precipitazione piovosa . . . . .	6
1.4	Misure di precipitazione . . . . .	9
1.4.1	Pluviometro . . . . .	9
1.4.2	Radar meteorologico . . . . .	10
1.4.3	Valutazione dei volumi d'afflusso . . . . .	10
1.5	Misure di portata . . . . .	13
1.5.1	Mulinelli idrometrici . . . . .	13
1.5.2	Profilatori di velocità ad ultrasuoni . . . . .	14
1.5.3	Misure di livello: scala delle portate . . . . .	14
1.5.4	Sezioni stabili . . . . .	18
1.5.5	Misura mediante traccianti . . . . .	21
1.6	Evaporazione e misure di evaporazione . . . . .	22
1.6.1	Psicrometro . . . . .	23
1.6.2	Determinazione del tasso di evaporazione . . . . .	23
1.6.3	Strumenti di misura . . . . .	26
1.7	Infiltrazione e misure di infiltrazione . . . . .	27
1.7.1	Infiltrometro . . . . .	27
1.7.2	Legge di Horton . . . . .	28
1.7.3	Valutazione del ruscellamento superficiale . . . . .	28
1.8	Risposta idrologica . . . . .	31
1.8.1	Separazione dell'idrogramma . . . . .	31
1.8.2	Separazione dello ietogramma . . . . .	32
1.8.3	Funzione di risposta del bacino . . . . .	33
1.9	Modelli di idrogramma . . . . .	37
1.9.1	Metodo sperimentale . . . . .	37
1.9.2	Modello della corrivazione o cinematico . . . . .	38
1.9.3	Modello italiano o dell'invaso lineare . . . . .	43
1.9.4	Modello di Nash o modello gamma . . . . .	46
1.9.5	Interpretazione probabilistica dell'idrogramma unitario istantaneo . . . . .	49
1.10	Esercizi . . . . .	50
1.10.1	Determinazione dell'idrogramma di Nash . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Statistica degli estremi</b>	<b>51</b>
2.1	Generalità . . . . .	51
2.1.1	Metodo della curva inviluppo . . . . .	51
2.1.2	Probabilità associata all'evento di piena . . . . .	52
2.1.3	Richiami di probabilità . . . . .	52
2.1.4	Curva di durata delle portate . . . . .	54
2.1.5	Curva di utilizzazione . . . . .	56

2.1.6	Frequenza cumulata empirica . . . . .	58
2.1.7	Modelli di probabilità . . . . .	59
2.2	Modelli probabilistici in idrologia . . . . .	60
2.2.1	Il caso delle portate al colmo di piena . . . . .	60
2.2.2	Metodo dei picchi sopra una soglia . . . . .	60
2.2.3	Metodo del massimo in un intervallo di tempo . . . . .	61
2.2.4	Tempo di ritorno . . . . .	64
2.3	Stima numerica dei parametri statistici di adattamento . . . . .	65
2.3.1	Richiami di statistica . . . . .	65
2.3.2	Metodo dei momenti . . . . .	66
2.3.3	Metodo di Gumbel . . . . .	67
2.3.4	Metodo dei minimi quadrati lineari . . . . .	68
2.3.5	Metodo della massima verosimiglianza . . . . .	69
2.4	Applicazioni all'intensità di pioggia . . . . .	71
2.4.1	Linea segnalatrice di possibilità pluviometrica . . . . .	72
2.5	Applicazioni alle portate al colmo di piena . . . . .	74
2.5.1	Pioggia di progetto ad intensità costante . . . . .	74
2.5.2	Calcolo della portata . . . . .	75
2.5.3	Modello della corrivazione lineare . . . . .	76
2.5.4	Modello dell'invaso lineare . . . . .	77
2.5.5	Modello di Nash . . . . .	79
2.6	Test statistici di adattamento di una distribuzione . . . . .	80
2.6.1	Passi di un test . . . . .	80
2.6.2	Test $\chi^2$ . . . . .	82
2.6.3	Test di Kolmogorov–Smirnov . . . . .	85
2.7	Esercizi . . . . .	88
2.7.1	Determinazione della LPP . . . . .	88
2.7.2	Valutazione della durata critica . . . . .	89
2.8	Appendice . . . . .	91
2.8.1	Alcune distribuzioni di probabilità . . . . .	91
2.8.2	Valori di $c_{\alpha, N}$ per il test di Kolmogorov–Smirnov . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Correnti a pelo libero</b> . . . . .	<b>95</b>
3.1	Generalità . . . . .	95
3.1.1	Ipotesi . . . . .	95
3.2	Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione . . . . .	97
3.2.1	Portata assegnata . . . . .	97
3.2.2	Energia specifica assegnata . . . . .	100
3.3	Alvei a debole pendenza e a forte pendenza . . . . .	103
3.3.1	Ipotesi di moto uniforme . . . . .	103
3.3.2	Pendenza critica per sezioni rettangolari larghe . . . . .	103
3.4	Carattere cinematico dei due tipi di corrente . . . . .	105
3.4.1	Celerità di propagazione delle perturbazioni di livello . . . . .	105
3.4.2	Numero di Froude . . . . .	106
3.5	Correnti in moto permanente. Profili del pelo libero . . . . .	107
3.5.1	Equazione differenziale del profilo del pelo libero . . . . .	108
3.5.2	Alvei a debole pendenza . . . . .	110
3.5.3	Alvei a forte pendenza . . . . .	111
3.5.4	Osservazioni generali . . . . .	112
3.5.5	Tracciamento quantitativo dei profili di moto permanente . . . . .	112
3.6	Passaggio attraverso lo stato critico. Il risalto . . . . .	114
3.6.1	Passaggio da corrente lenta a corrente veloce . . . . .	114
3.6.2	Passaggio da corrente veloce a corrente lenta . . . . .	114
3.7	Esempi applicativi . . . . .	121
3.7.1	Procedura per la determinazione dei profili . . . . .	121
3.7.2	Presenza di una paratoia piana in alvei a debole pendenza . . . . .	122
3.7.3	Presenza di una paratoia piana in alvei a forte pendenza . . . . .	124

---

3.7.4	Cambio di pendenza con paratoia piana . . . . .	125
3.7.5	Passaggio sopra una soglia di fondo . . . . .	126
3.7.6	Stabilizzazione di un risalto idraulico . . . . .	129
3.7.7	Passaggio fra le pile di un ponte . . . . .	130
3.8	Tracce dell'onda di piena . . . . .	135
3.8.1	Valutazione della portata in condizioni di piena . . . . .	135
3.8.2	Valutazione di variazioni del coefficiente di scabrezza . . . . .	136
3.9	Estrapolazione della scala delle portate . . . . .	137
3.10	Alvei con sezioni composite o con scabrezza eterogenea . . . . .	138
3.10.1	Calcolo della portata totale . . . . .	138
3.11	Curve nei canali . . . . .	139
3.11.1	Correnti lente . . . . .	139
3.11.2	Correnti veloci . . . . .	140
3.12	Alvei in letti alluvionali: condizioni di stabilità . . . . .	141
3.12.1	Introduzione . . . . .	141
3.12.2	Caratterizzazione del sedimento . . . . .	141
3.12.3	Condizioni critiche: inizio del trasporto solido . . . . .	143
3.13	Principi di modellistica idraulica da laboratorio . . . . .	145
3.13.1	Derivazione di una scala . . . . .	145
3.14	Esercizi . . . . .	148
3.14.1	Tracciamento di un profilo di moto permanente . . . . .	148
3.14.2	Localizzazione di un risalto in corrispondenza di un salto di fondo . . . . .	150
3.14.3	Calcolo della portata sfiorabile da uno stramazzo laterale . . . . .	152



# Capitolo 1

## Idrologia e misure idrauliche

Nei paesi occidentali il consumo medio di acqua è di circa 500l/giorno pro capite, che equivalgono a  $200 \text{ m}^3/\text{anno}$ . Supponendo una popolazione mondiale di 5 miliardi di persone si arriva a 1000 miliardi di  $\text{m}^3/\text{anno}$ .

L'acqua disponibile sulla Terra è circa  $1,4 \times 10^9 \text{ Km}^3$  ( $1 \text{ Km}^3 = 10^9 \text{ m}^3$ ). L'acqua è così distribuita:

- 97,2%: oceani;
- 2,2%: calotte polari e ghiacciai;
- $\sim 0,6\%$ : acque del sottosuolo (falde acquifere);
- rimanente: acque di superficie.

Le acque di superficie sono così distribuite:

- laghi:  $125.000 \text{ Km}^3$ ;
- laghi salati:  $100.000 \text{ Km}^3$ ;
- fiumi:  $1.300 \text{ Km}^3$ ;
- umidità del suolo:  $70 \text{ Km}^3$ ;
- atmosfera:  $13.000 \text{ Km}^3$ .

### 1.1 Ciclo idrologico

La presenza dell'acqua sulla Terra è di tipo dinamico, ossia caratterizzata da una serie di scambi continui tra:

- atmosfera;
- superficie solida e corpi idrici;
- sottosuolo;
- oceani.

L'insieme di questi flussi d'acqua prende il nome di *ciclo idrologico*. In particolare si hanno:

- (A) *precipitazioni*: passaggio dall'atmosfera alla superficie solida ed agli oceani (pioggia, neve, grandine e rugiada);
- (B) *evaporazione*: passaggio dallo stato liquido a quello di vapore in atmosfera;
- (G) *traspirazione*: passaggio dell'acqua dal sottosuolo direttamente in atmosfera grazie all'opera dei vegetali;

- (C) *ruscellamento*: passaggio dalla superficie solida ai corpi idrici e agli oceani;  
 (F) *infiltrazione*: passaggio dalla superficie solida al sottosuolo;  
 (E) *esfiltrazione*: passaggio dell'umidità del sottosuolo (non saturo) in superficie;  
 (D) *sorgenti*: passaggio delle acque sotterranee nei corpi idrici o negli oceani.

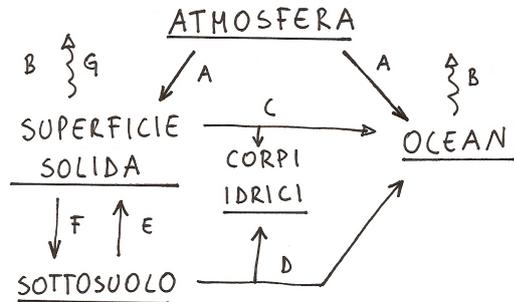


Figura 1.1: Ciclo idrologico.

Il movimento continuo del ciclo idrologico è possibile grazie all'*energia solare*, la quale produce i trasferimenti di calore che rendono possibile tale moto. Dal punto di vista degli aspetti dinamici l'*atmosfera* è la parte più importante in quanto è la prima ad assorbire tale energia.

I principi fisici fondamentali del ciclo sono:

1. il principio di *conservazione della massa*: dà luogo al bilancio idrologico;
2. il principio di *conservazione dell'energia*: spesso non viene considerato in quanto, vista la complessità dei processi, in idrologia ci sia accontenta del primo.

La differenza tra idrologia e idraulica è essenzialmente dovuta alla *scala di osservazione spazio-temporale*:

- *idraulica*: m  $\rightarrow$  Km, s  $\rightarrow$  min;
- *idrologia*: Km  $\rightarrow$  ..., anno solare (serve a tralasciare gli effetti della stagionalità).

### 1.1.1 Bilancio idrologico

Analizziamo una superficie di area  $A$  e sia  $V$  il volume accumulato su tale area a causa delle precipitazioni. Se si suppone di spargere in maniera uniforme tale volume su tutta la superficie si ottiene un'altezza d'acqua pari a:

$$h = \frac{V}{A}$$

L'*equazione fondamentale del bilancio idrologico* è:

$$\frac{dV}{dt} = Q_{\text{in}} - Q_{\text{out}} \quad (1.1)$$

Per poter applicare concretamente tale equazione bisogna:

- definire  $A$ ;
- conoscere i flussi in entrata ed in uscita.

Se si analizza il ciclo idrologico alla scala dell'anno solare si può ammettere, a meno di approssimazioni più o meno grandi, che se ci si trova in un ciclo di un anno medio, dopo un anno le condizioni dovrebbero essere uguali a quelle di un anno prima:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{\text{anno solare}} \approx 0$$

## Esempio

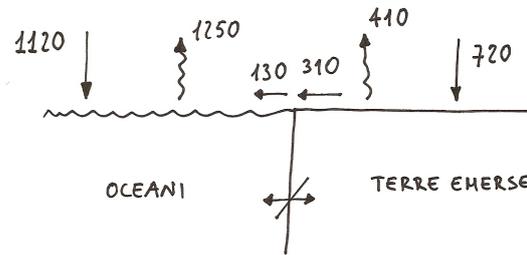


Figura 1.2: Esempio di bilancio idrologico.

Consideriamo un anno medio:

- pioggia che cade sulla superficie degli oceani: 1120 mm;
- pioggia che cade sulle terre emerse: 720 mm;
- acqua che evapora dalla superficie degli oceani: 1250 mm;
- acqua che evapora dalla superficie solida: 410 mm;
- acqua che passa dalla superficie solida a quella degli oceani: 310 mm (rispetto alla superficie solida), 130 mm (rispetto alla superficie degli oceani);
- acqua che viene scambiata a livello di sottosuolo: trascurabile.

Facendo una media ogni anno cade sulla superficie terrestre 1 m d'acqua.

Il volume di pioggia annua è pari a:

$$V_{pa} = 500 \times 10^6 \times 10^{-3} = 500.000 \text{ Km}^3/\text{anno}$$

Il volume d'acqua in atmosfera è pari a:

$$V_{atm} = 13 \times 10^3 \text{ Km}^3$$

Ciò significa che il *tempo di permanenza* dell'acqua in atmosfera è estremamente breve: mediamente ogni anno l'intera quantità d'acqua presente in atmosfera si riversa sulla Terra circa 40 volte ( $= V_{pa}/V_{atm}$ ), quindi la durata media della permanenza dell'acqua in atmosfera è di circa 9 giorni ( $365/40$ ). Altri esempi di tempi di permanenza sono:

- fiume Po: 700 Km,  $v=1$  m/s, circa 200 ore ossia 10 giorni;
- sottosuolo: 30 anni.

## 1.2 Bacini imbriferi

Si definisce *bacino imbrifero* o *idrografico* relativo alla sezione S la porzione di territorio in cui le piogge cadute contribuiscono al deflusso nella sezione S. Il primo termine si riferisce esplicitamente a tale definizione mentre il secondo è relativo alla distribuzione dei canali che raccolgono le acque da una superficie e le portano alla sezione S.

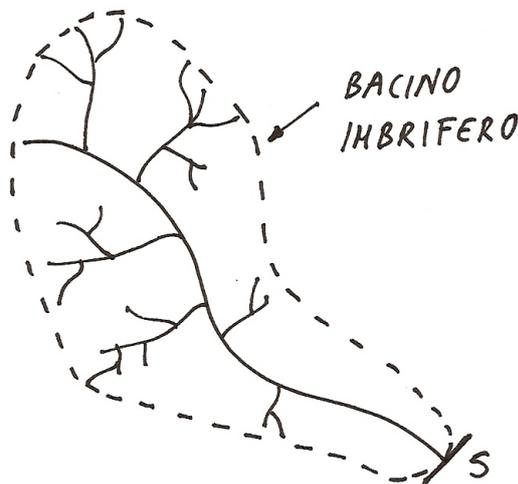


Figura 1.3: Bacino imbrifero.

Si definisce *reticolo idrografico* il grafo formato dalle *aste fluviali* e orientato dalle zone a potenziale gravitazionale maggiore verso quelle a potenziale minore. Normalmente nelle zone imbrifere, ossia nelle zone dove le portate sono generate, il reticolo è *ad albero*, ossia è costituito da tante sorgenti e da una sola uscita detta *sezione di chiusura del bacino*.

I corsi d'acqua possono essere suddivisi ciascuno in tre parti principali:

1. *bacino imbrifero propriamente detto*: il processo fondamentale è la raccolta d'acqua, corrisponde alla zona montana;
2. *canale di trasporto*: il processo fondamentale è l'interazione con le falde freatiche (in condizioni di magra il fiume cede acqua alle falde freatiche), corrisponde alla zona in cui non ci sono più grossi affluenti;
3. *foce*: il processo fondamentale è l'interazione col corpo idrico recettore.

### 1.2.1 Delimitazione del bacino imbrifero

Le linee di massima pendenza dei versanti tagliano perpendicolarmente le linee equipotenziali, il moto avviene quindi parallelamente ad esse e sono dette *linee di spartiacque*. Le *zone di crinale* sono invece dei massimi locali nella superficie topografica. I *massimi di curvatura delle curve di livello* possono essere:

- *zone di crinale*;
- *aste fluviali*.

L'utilizzo del DTM (Digital Terrain Model) è molto utile per il riconoscimento automatico dell'andamento degli espluvi e degli impluvi.

#### Acque sotterranee

A contribuire alla portata di un fiume non c'è solo l'acqua di ruscellamento in superficie ma anche una componente di *filtrazione* nel terreno. A rigore quindi l'analisi topografica è sufficiente solamente

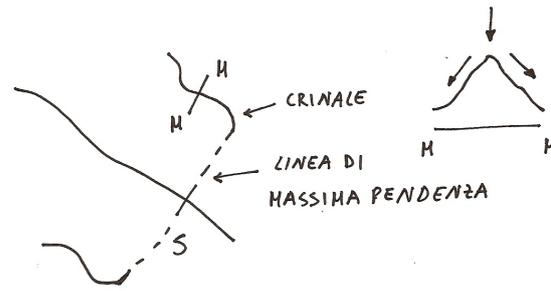


Figura 1.4: Linee di massima pendenza e crinali.

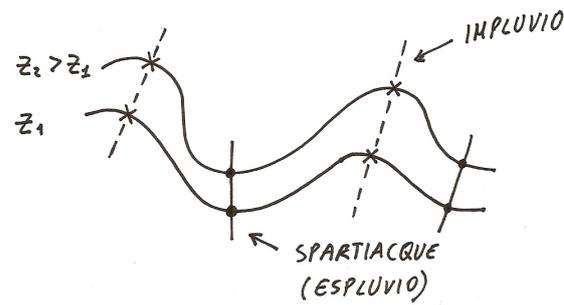


Figura 1.5: Linee di espluvio e linee di impluvio.

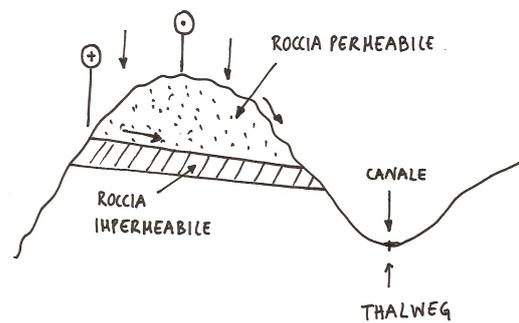


Figura 1.6: Influenza delle condizioni geostrutturali sul bacino idrologico.

per il ruscellamento e non per i moti di filtrazione, i quali forniscono acqua nei periodi asciutti. Approssimativamente possiamo dire che della pioggia che cade mediamente:

- 1/3 evapora;
- 1/3 s'infiltra;
- 1/3 scorre in superficie.

## 1.3 Processi idrologici fondamentali

### 1.3.1 Precipitazione piovosa

Il fenomeno fondamentale per la precipitazione piovosa è la *condensazione* ossia il passaggio dell'umidità dell'atmosfera dallo stato di vapore allo stato liquido quando l'atmosfera risulta satura. La massima quantità di vapor d'acqua che la miscela aria può contenere è detta *tensione di vapor d'acqua saturo*.

La condensazione è essenzialmente dovuta ad un *raffreddamento*: sottraendo calore ad una massa umida essa diventa satura e si ha la condensazione.

La probabilità maggiore è quella che una goccia d'acqua vada a formarsi attorno ad un granello di pulviscolo atmosferico. Una volta che una microgoccia si è formata è più probabile che si abbia un'altra condensazione attorno ad essa.

Le *nuvole* sono gocce d'acqua allo stato liquido. Su di esse agisce il loro *peso proprio* e le *tensioni tangenziali* dovute ai *moti turbolenti* dell'aria.

Si ha una *precipitazione piovosa* quando a causa di un particolare raffreddamento si ha un ingrossamento delle gocce d'acque e la rottura dell'equilibrio di forze che si era instaurato precedentemente.

I *processi fondamentali di raffreddamento* sono 3:

1. raffreddamento *ciclonico*: è legato alla circolazione atmosferica ed al trasferimento di masse d'aria a differente contenuto termico e d'umidità *da zone ad alta pressione a zone a bassa pressione*;

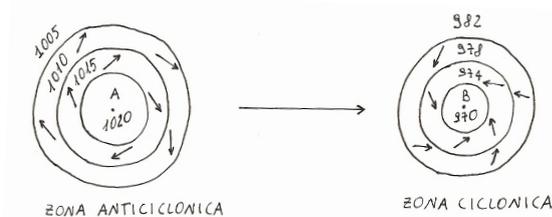


Figura 1.7: Zona anticiclonica e ciclonica nell'emisfero Nord.

2. raffreddamento *orografico*: quando una corrente d'aria incontra una catena montuosa la massa d'aria tende ad innalzarsi e, dal momento che gli strati alti dell'atmosfera sono più freddi, si ha un raffreddamento;
3. raffreddamento *convettivo*: se la superficie del terreno è molto calda essa riesce a scaldare l'aria che, diventando più leggera, tende a salire per la spinta archimedeica, in superficie arriva altra aria che a sua volta si scalda e risale formando una colonna ascendente che mentre sale si raffredda (meccanismo convettivo).

#### Circolazione ciclonica

La scala a cui avviene è molto ampia: 1.000–5.000 Km (le carte sinottiche dei meteorologi sono a livello di continente).

Per effetto dell'*accelerazione di Coriolis*, dovuta alla rotazione terrestre, gli spostamenti non sono rettilinei ma (nell'emisfero Nord):

- *circolazione anticiclonica* (avviene attorno ad un centro di *alta pressione*) è *oraria*;
- *circolazione ciclonica* (avviene attorno ad un centro di *bassa pressione*) è *antioraria*.

Le masse d'aria che arrivano in queste zone possono avere contenuti di umidità e temperatura diverse in quanto possono provenire da Nord, Sud, Ovest o Est. Si consideri, per esempio, un centro di bassa pressione con dell'aria fredda proveniente da Nord e dell'aria calda proveniente da Sud. Si definisce:

- *fronte*: zona di contatto fra masse d'aria diverse;
- *fronte caldo*: zona del fronte dove spinge l'aria calda;
- *fronte freddo*: zona del fronte dove spinge l'aria fredda.

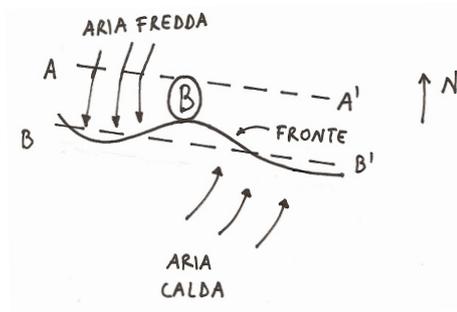


Figura 1.8: Fronte caldo e fronte freddo.

Consideriamo la sezione A-A': nel centro si parla di *fronte occluso* ossia l'aria ristagna, si ha una stratificazione dell'aria (aria calda sopra, aria fredda sotto) con formazione di nuvolosità diffusa o deboli piogge.

Consideriamo la sezione B-B':

- l'aria calda che arriva trova l'aria fredda ferma, che avendo un'inerzia maggiore (più densa) tende a rimanere al suolo causando lo scivolamento dell'aria calda sopra di essa: si ha una condensazione in verticale lungo il fronte con grande sviluppo in pianta, ne conseguono:
  - forti sistemi nuvolosi;
  - piogge di media-bassa intensità.
- l'aria fredda che arriva s'insinua sotto l'aria calda che a sua volta tende a sollevarsi molto più rapidamente che nel caso precedente, a causa dell'elevata quantità di moto dell'aria fredda: si ha una condensazione con modesto sviluppo in pianta, ne conseguono:
  - sistemi nuvolosi modesti;
  - piogge di intensità elevata.

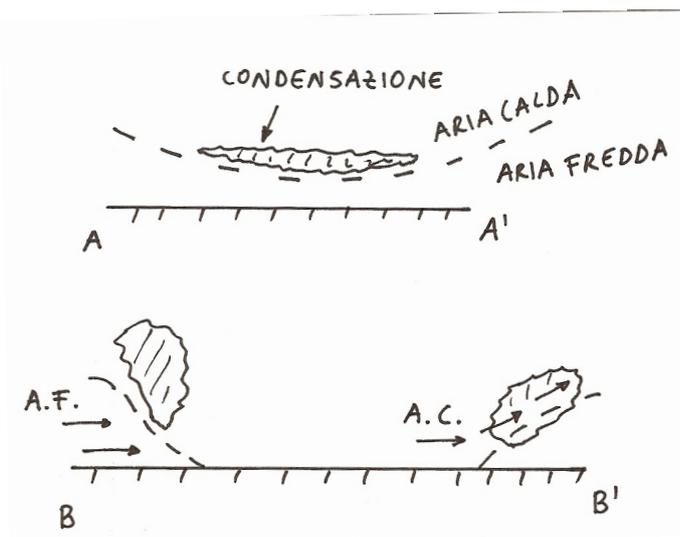


Figura 1.9: Sezioni A-A' e B-B'.

Tutto questo meccanismo costituisce un *quadro sinottico* (>1.000 Km), al suo interno si hanno *zone di precipitazione* legate ai fronti (100-1000 Km), esistono infine dei nuclei di precipitazione più elevata detti *celle di scroscio* (1-10 Km). La misura delle piogge è fortemente influenzata da questi meccanismi.

### Circolazione orografica

Le masse d'aria che passano sopra i mari e le pianure si caricano di umidità per evaporazione, quando incontrano una catena montuosa s'innalzano e si ha la generazione di sistemi nuvolosi e precipitazioni.

### Circolazione convettiva

È legata alla presenza di superfici calde che riscaldano l'atmosfera per contatto: l'aria calda tende ad innalzarsi, si ha una diminuzione di pressione nella zona bassa e un richiamo di altre masse d'aria fredda dalla superficie. Il processo termina quando la superficie cessa di essere calda.

Dal momento che la corrente ascensionale che si sviluppa è molto forte le gocce d'acqua per cadere devono avere dimensioni molto grosse. È questo il meccanismo, tipico delle celle di scroscio, che porta alla formazione dei cosiddetti *temporali estivi* (eventi brevi ma intensi).

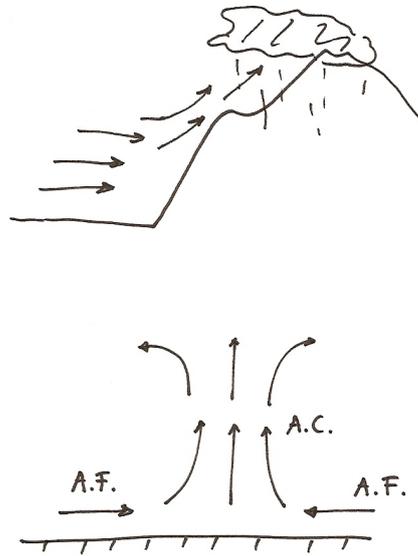


Figura 1.10: Circolazione orografica e convettiva.

## 1.4 Misure di precipitazione

### 1.4.1 Pluviometro

Un pluviometro è essenzialmente costituito da un recipiente con bocca orizzontale di forma circolare che consente l'accumulo dell'acqua di precipitazione. Esso viene disposto in aree aperte in modo da evitare schermature dovute alla presenza di edifici o coperture vegetali. Passato un certo tempo  $\Delta t$ , detto *intervallo di osservazione*, si misura l'acqua raccolta all'interno dello strumento<sup>1</sup>.

Si definisce *altezza di pioggia* [mm]:

$$\Delta h = \frac{V}{\Omega} \quad (1.2)$$

dove:

- $V$ : volume accumulato;
- $\Omega$ : area della superficie di captazione (valore standard  $\Omega = 0,1 \text{ m}^2$ ).

Si misura l'altezza invece che il volume di pioggia in quanto si vuole estrapolare il campionamento puntuale sull'area attorno ad esso.

Si definisce *intensità di pioggia* [mm/giorno]:

$$j = \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (1.3)$$

### Servizio Idrografico Nazionale

Il vecchio Servizio Idrografico Nazionale<sup>2</sup> era dotato di una *rete di osservatori* con una densità media di uno strumento ogni 300 – 400 Km<sup>2</sup>. Esso osservava le cosiddette *piogge giornaliere*: piogge cadute tra le 9 a.m. del giorno precedente e le 9 a.m. del giorno di osservazione. I dati venivano poi pubblicati sugli *Annali Idrologici* (parte I).

### Pluviometri registratori (pluviografi)

Dal momento che per gli eventi importanti il dato giornaliero non è sufficiente si è resa necessaria l'introduzione accanto al pluviometro di uno strumento che registrasse l'andamento nel tempo dell'altezza di pioggia.

- *Pluviometro a bilancia*: l'ago della bilancia è dotato di un pennino che lascia una traccia su una carta ad orologeria (gli apparecchi più moderni sono di tipo digitale).

Il difetto principale di questi pluviometri è che quando la vaschetta si riempie bisogna andare a svuotarla.

- *Pluviometro a sifone*: il serbatoio è dotato di un sifone che, una volta innescato, fa svuotare il serbatoio.

I difetti sono il fatto che il sifone può non innescarsi e che esso risente molto delle impurità della pioggia.

- *Pluviometro a vaschetta basculante*: una volta che la prima vaschetta si riempie ( $20 \text{ cm}^3 = 0,2 \text{ mm}$ ) si forma una coppia ribaltante che fa svuotare la vaschetta piena e mette sotto raccolta quella vuota. Su una carta ad orologeria il ribaltamento viene indicato con uno scatto sul diagramma, quando si arriva al bordo della carta l'andamento viene invertito. L'avanzamento del rullo di carta è di 2 mm/ora ossia una striscia di carta da 40 cm ogni settimana.

I difetti principali sono la difficile taratura meccanica dello strumento e il fatto che durante il ribaltamento una parte di pioggia non viene raccolta.

<sup>1</sup>Nel caso di misurazioni effettuate ad intervalli di tempo piuttosto lunghi (es. pluviometri stagionali) si ricorre all'utilizzo di un film d'olio in modo da ricoprire la pioggia che si raccoglie nello strumento ed impedirne l'evaporazione.

<sup>2</sup>Servizio nato per scopi energetici ed agricoli attualmente passato alle competenze delle Regioni (ARPA)

### Sorgenti principali di errore

Il problema principale delle misurazioni effettuate con pluviometri è la *significatività della misura*. In particolare la World Meteorological Organization (WMO) ha individuato 5 sorgenti principali di errore:

1. l'esposizione:  $-5\% \div -80\%$
2. l'evaporazione:  $\sim -1\%$
3. lo *splash in* e lo *splash out*:  $\sim +1\%$
4. l'adesione:  $\sim -0,5\%$
5. l'orizzontalità della bocca:  $\sim -0,5\%$

### Nivometri

I *nivometri* sono particolari pluviometri che raccolgono e poi sciolgono la neve, misurandone la quantità. Gli errori che si commettono nel misurare le precipitazioni nevose sono ancora più grandi in quanto avendo la neve una velocità di caduta più bassa della pioggia essa risente maggiormente della *turbolenza* dell'aria.

#### 1.4.2 Radar meteorologico

Il principio fisico sfruttato dal radar meteorologico è che onde radio con lunghezza d'onda comparabile alla dimensione delle gocce d'acqua vengono riflesse dalla presenza d'acqua in atmosfera.

Il radar meteorologico è in grado di vedere non tanto la *pioggia* (ad eccezione dei modelli che sfruttano l'effetto doppler) quanto il contenuto d'acqua in atmosfera, ossia soprattutto le *grosse masse d'acqua a quote elevate* (nuvole). Esso esegue una sorta di *tomografia* ossia una serie di alzate con spazzo variabile in modo da riconoscere la struttura verticale degli ammassi nuvolosi. Il risultato fornito è quello del contenuto d'acqua liquida sopra pixel di circa  $1 \text{ Km}^2$ .

I dati forniti vengono poi elaborati mediante specifici algoritmi che permettono di:

- fornire una *buona distribuzione spaziale delle precipitazioni*;
- fornire solamente un'indicazione di massima sull'*intensità di pioggia* (classi di intensità).

Il *raggio d'azione* è al massimo di 100–200 Km, oltre comincia a risentire dell'effetto della curvatura terrestre.

La Regione Friuli Venezia Giulia è attualmente coperta da 2 radar meteorologici situati a:

- Tèolo (Veneto - Colli Euganei);
- Fossalòn di Grado.

#### 1.4.3 Valutazione dei volumi d'afflusso

Una volta ottenute le misure puntuali di pioggia il passo successivo è quello di passare ad una stima del volume complessivo di pioggia caduto su una determinata area. La definizione corretta del problema della valutazione del volume d'afflusso  $V$  richiede a sua volta la definizione di:

- a) area topografica  $A$ ;
- b) intervallo di tempo  $\Delta t$  (per esempio: 1 ora, 6 ore, 1 giorno, 1 anno);

Siano  $P_i$  le posizioni a cui sono associate le altezze di pioggia  $h_i$  cadute nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$P_i \longrightarrow h_i \quad (\text{in } \Delta t)$$

**Metodo delle isoiete**

Date le altezze di pioggia nelle posizioni  $P_i$  il metodo consiste nel tracciare le *curve di uguale altezza di pioggia* (isoiete). Generalmente si suppone un *andamento lineare* dell'altezza di pioggia tra due posizioni. Le isoiete possono venir tracciate con diverse equidistanze: se si adotta un'equidistanza di 100 mm allora il passaggio da una isoietta all'altra comporta un salto di 100 mm nell'altezza di pioggia.

Una volta definita l'area  $A$  sulla quale si vuole effettuare la valutazione del volume d'afflusso, si fissano delle aree di competenza  $A_i$  tali che:

$$\sum A'_i = A \qquad V_{\Delta t} = \sum A'_i H_i$$

Ad esempio si può assegnare l'altezza  $H_1 = 1000$  mm a tutta l'area  $A_1$  compresa tra le isoiete 950 e 1050 mm.

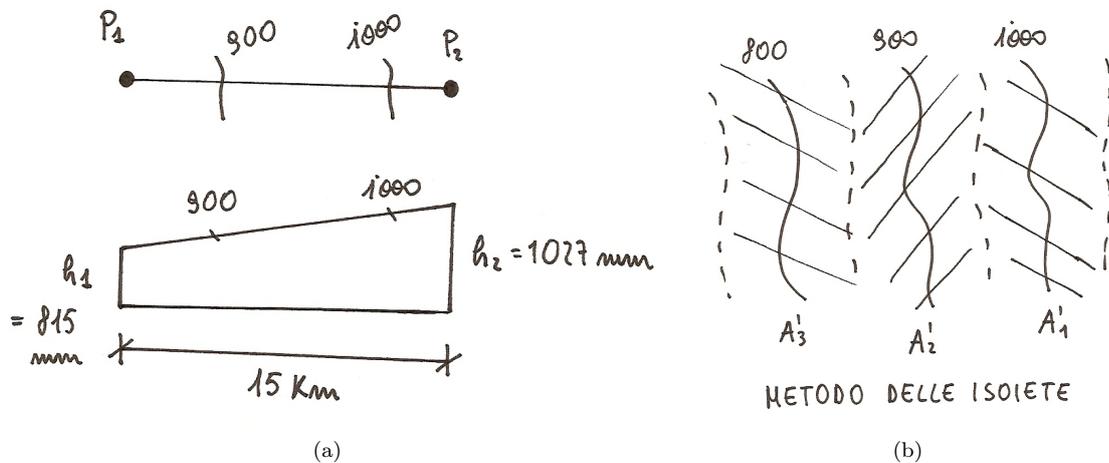


Figura 1.11: Metodo delle isoiete.

I *vantaggi* principali di tale metodo sono:

- ✓ le isoiete seguono un andamento plausibile delle precipitazioni;
- ✓ le isoiete possono tener conto di come varia la topografia dell'area;
- ✓ è possibile sfruttare conoscenze acquisite in precedenza per modificare in maniera opportuna l'andamento delle isoiete.

Gli *svantaggi* principali di tale metodo sono:

- il procedimento di tracciamento può essere molto *soggettivo*;
- se le altezze  $h_i$  nelle posizioni  $P_i$  variano o se varia il tempo  $\Delta t$  su cui vengono valutate allora bisogna ricalcolare nuovamente le aree  $A'_i$ .

**Metodo dei poligoni di Thiessen o dei topoieti**

Con questo metodo ad ogni punto dell'area  $A$  viene assegnata un'altezza di pioggia pari a quella misurata nella posizione  $P_i$  più vicina. Di conseguenza per individuare la aree  $A'_i$ , associate alle altezze  $h_i$ , bisogna considerare i segmenti congiungenti posizioni  $P_i$  vicine e tracciare il luogo dei punti equidistanti da entrambe le posizioni considerate, ossia gli assi dei segmenti. Il volume d'afflusso sull'area  $A$  è pari a:

$$V_{\Delta t} = \sum A'_i h_i$$

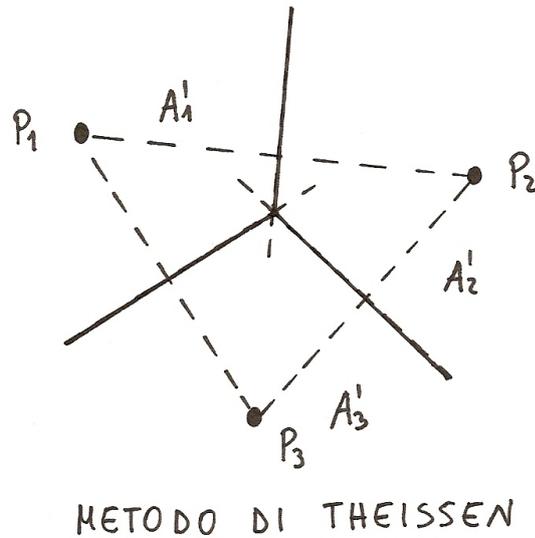


Figura 1.12: Metodo di Thiessen.

L'altezza media di pioggia caduta sull'area  $A$  è pari a:

$$\bar{h} = \frac{V}{A} = \sum \frac{A'_i}{A} \cdot h_i$$

I vantaggi principali di tale metodo sono:

- ✓ la suddivisione delle aree dipende esclusivamente dalla posizione dei pluviometri quindi, una volta determinate, al variare dei valori  $h_i$  non serve che vengano ricalcolate.

Gli svantaggi principali del metodo sono:

- è un procedimento *meno flessibile* del precedente in quanto non è possibile tener conto di altre nozioni acquisite precedentemente.

### Osservazione

Per entrambi i metodi considerati l'afflusso di precipitazione in una determinata area può dipendere da misure effettuate al di fuori dell'area in esame.

## 1.5 Misure di portata

Si consideri una sezione trasversale al moto medio di un canale, si vuole sapere qual'è la massa che passa in tale sezione nell'unità di tempo. Dal momento che l'acqua viene considerata incompressibile ( $\rho = \text{cost}$ ), parlare di *portata volumetrica* equivale a parlare di *portata di massa*:

$$Q = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} dA \quad (1.4)$$

Il calcolo della portata si traduce praticamente in un'integrazione numerica, in cui si valutano le componenti ortogonali  $v_{ni}$  della velocità rispetto alla sezione considerata per ogni area  $\Delta A_i$  in cui viene suddivisa l'area  $A$  della sezione:

$$Q \approx \sum_i v_{ni} \Delta A_i \quad (1.5)$$

Ciò significa che per ogni  $\Delta A_i$  si deve eseguire almeno una misura di velocità.

### 1.5.1 Mulinelli idrometrici

Nei *mulinelli idrometrici ad elica* l'elica viene messa in moto dal filetto fluido che l'attraversa. Ad un giro completo di elica corrisponde una determinata distanza percorsa dall'acqua detta *passo idraulico*<sup>3</sup>, misurando quindi il numero di giri  $n$  nel tempo  $\Delta t$  e noto il passo idraulico  $p$  dell'elica si ricava la velocità del filetto fluido:

$$v \approx \frac{n \cdot p}{\Delta t} \quad (1.6)$$

Il mulinello ad elica valuta di per sé la componente normale della velocità purché il suo asse sia perpendicolare alla sezione da valutare.

L'operazione di misura delle velocità col mulinello idrometrico può essere effettuata:

- al *guado*: utilizzando un'*asta idrometrica* per sostenere lo strumento e misurare la profondità dell'acqua;
- in sospensione con un *battello*: per tener conto dell'effetto di trascinamento dell'acqua nella valutazione della profondità si è soliti utilizzare un'approssimazione di tipo triangolare.

La differenza fondamentale fra il mulinello idrometrico ad elica e quello a *cucchiaie* è che quest'ultimo misura direttamente il *modulo della velocità* (la rotazione è indifferente alla direzione della velocità). Poi mediante un giroscopio si determina la direzione ed il verso della pinna e si risale alla componente normale di velocità.

### Durata della misura

La durata dell'intervallo di misura  $\Delta t$  deve essere sufficientemente lunga ( $30''-1'$ ) per due motivi principali:

1. utilizzando i mulinelli idrometrici si misurano sempre  $n$  giri interi, quindi si possono perdere i mezzi giri in partenza ed i mezzi giri alla fine:

$$v \approx \frac{n \cdot p}{\Delta t} \pm \frac{1}{2} \frac{p}{\Delta t}$$

È bene che  $n$  sia sufficientemente elevato.

2. a causa della *turbolenza* si hanno fluttuazioni del campo di velocità nel tempo (variabili in funzione della classe di turbolenza), quindi  $\Delta t$  deve essere tale da mediare tali effetti.

---

<sup>3</sup>Si noti che il passo idraulico non corrisponde esattamente al passo d'avvitamento dell'elica, ma esso viene valutato nelle canalette idrauliche, dove è possibile regolare la velocità dell'acqua e misurare il numero di giri dell'elica.

### Numero di punti misurati

Maggiore è il numero di punti su cui si valuta la velocità e migliore è la stima della portata. Un giusto compromesso tra stima corretta della portata e tempo globale di misura è dato da *30 punti*.

Dal momento che la distribuzione delle velocità lungo la verticale in un canale rettangolare è di tipo logaritmico, la misura effettuata ad una profondità pari a  $0,6y$  dovrebbe corrispondere alla misura della *velocità media lungo la verticale*. In questo modo si può effettuare una stima con un'unica misura su ogni verticale considerata. Leggermente più precisa è la stima mediante *3 misure*:

$$\bar{v} = (v_{0,2} + 2v_{0,6} + v_{0,8})/4 \quad (1.7)$$

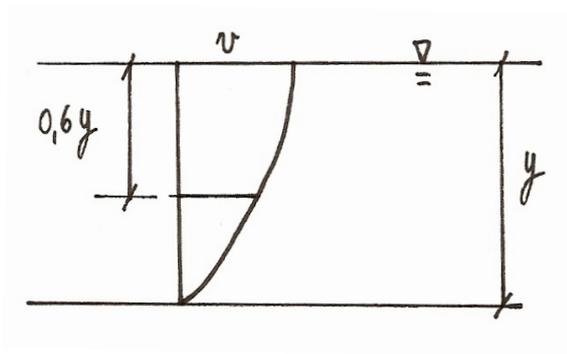


Figura 1.13: Profilo di velocità in un canale rettangolare.

### 1.5.2 Profilatori di velocità ad ultrasuoni

Tali strumenti emettono in maniera diagonale rispetto alla direzione del flusso un'onda sonora. Se l'acqua fosse perfettamente limpida ci sarebbe un solo eco dal fondo, in realtà la presenza di impurità fa sì che gli echi di ritorno siano più di uno.

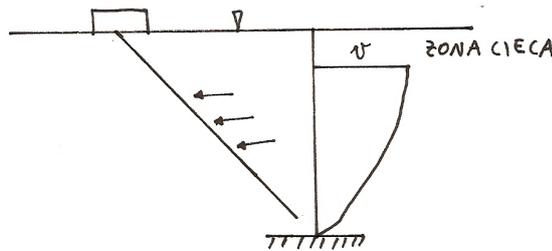


Figura 1.14: Profilatore di velocità ad ultrasuoni.

L'*intervallo di tempo*  $\Delta t$  trascorso tra l'emissione del suono e il ritorno fornisce la *distanza* dell'ostacolo che ha provocato l'eco.

La *mutazione di frequenza* tra il segnale emesso e quello ricevuto dà invece, grazie all'*effetto Doppler*, indicazioni sulla *velocità* del flusso.

Con questi strumenti è possibile effettuare *moltissime misure* tuttavia si hanno dei *problemi nella taratura* dello strumento.

### 1.5.3 Misure di livello: scala delle portate

La registrazione in continuo delle portate con uno dei sistemi visti non è praticamente possibile. Ciò che invece si può misurare con continuità è il *livello*  $Z$ , da cui si può mediante una relazione *univoca* del tipo  $Q = Q(Z)$ , detta *scala delle portate* dell'alveo, risalire alla portata.

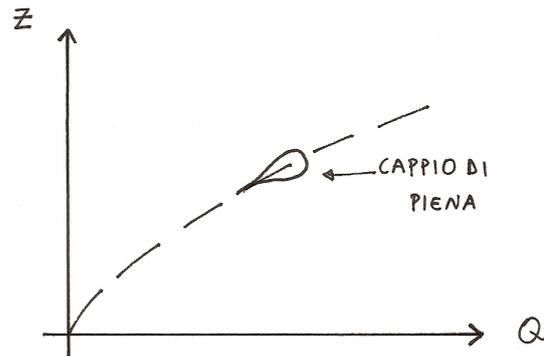


Figura 1.15: Scala delle portate.

Dal momento che il fondo del canale può subire delle variazioni  $Z$  viene sempre riferito ad una scala detta *scala idrometrica*, la quale a sua volta è riferita in maniera assoluta al *livello medio del mare* (zero assoluto). Le scale idrometriche vengono materializzate mediante stadie fissate alle spalle dei ponti o ad altre strutture rigide e fisse.

Durante l'onda di piena  $Q(Z)$  non è più biunivoca ma forma un ciclo d'isteresi detto *cappio di piena*. Proprio durante le onde di piena tuttavia le misure di portate non sono possibili, essenzialmente per due motivi:

1. le velocità sono elevate ed il fiume trascina del materiale asportato dalle sponde;
2. essendo in un transitorio bisogna essere veloci nella misura.

In generale comunque i cappi di piena sono piuttosto schiacciati per cui la consuetudine è quella di approssimarne l'andamento con la curva di moto permanente.

### Idrometri

I tipi di idrometri più diffusi sono:

- stadie;
- a galleggiante;
- con polvere di sughero;
- a sensore di pressione;
- a gorgoglio d'aria;
- ad ultrasuoni<sup>4</sup>.

### Determinazione della scala delle portate

Supponiamo di installare uno strumento nuovo e di effettuare una serie di misure di livello in periodi di magra. All'aumentare del livello  $Z$  aumenta sia la sezione  $A$  che la velocità media  $V$ . Consideriamo infatti un *canale regolare in moto uniforme*, sussiste la ben nota *relazione di Chézy*:

$$V = C\sqrt{gRi_f} \quad (1.8)$$

- $C$ : coefficiente d'attrito;
- $R$ : raggio idraulico ( $\Omega/p$  con  $p$  perimetro bagnato);
- $i_f$ : pendenza del fondo.

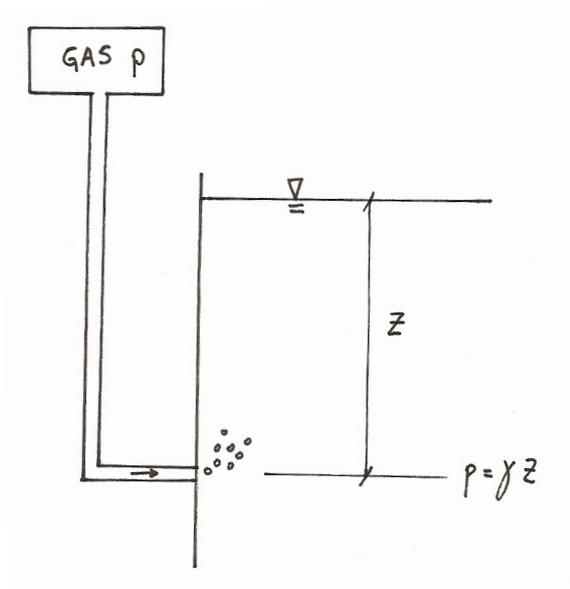


Figura 1.16: Idrometro a gorgoglio d'aria.

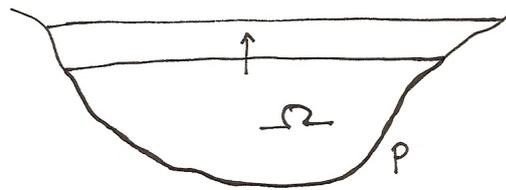


Figura 1.17: Perimetro bagnato.

Si noti come all'aumentare di  $Z$  il raggio idraulico  $R$  aumenti facendo aumentare anche  $V$ .

Ne consegue che all'aumentare del livello  $Z$  la portata aumenta *più che linearmente*, sussiste infatti una relazione di *potenza* del tipo:

$$Q = k(Z - Z_0)^\alpha \quad (1.9)$$

dove  $Z_0$  è il livello idrometrico per cui  $Q = 0$ .

La stima di  $k$ ,  $Z_0$  ed  $\alpha$  avviene attraverso la relazione:

$$\log Q = \log k + \alpha \log(Z - Z_0) \quad (1.10)$$

$Z_0$  viene trovato per tentativi finché i punti sperimentali si dispongono su una retta.

Il passo successivo è quello di valutare la scala delle portate per *portate grandi*, per fare ciò è necessario ricorrere ad un'operazione di *estrapolazione*. Essa può avvenire secondo tre livelli di precisione (ordine decrescente):

1. Si utilizzano le *equazioni del moto permanente gradualmente variato* tarandole sulle sezioni disponibili ed applicandole poi anche alle altre.
2. Si considera la relazione:

$$Q = A \cdot V$$

con  $V$  velocità media, e si istituisce una *scala delle velocità medie*.

<sup>4</sup>Necessita di correzioni in base alla temperatura dell'aria dalla quale dipende la densità dell'aria, dalla quale a sua volta dipende la velocità delle onde sonore. Risente molto del problema delle vibrazioni dovute al vento.

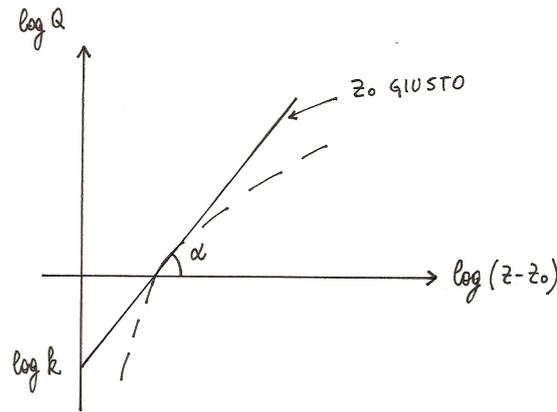
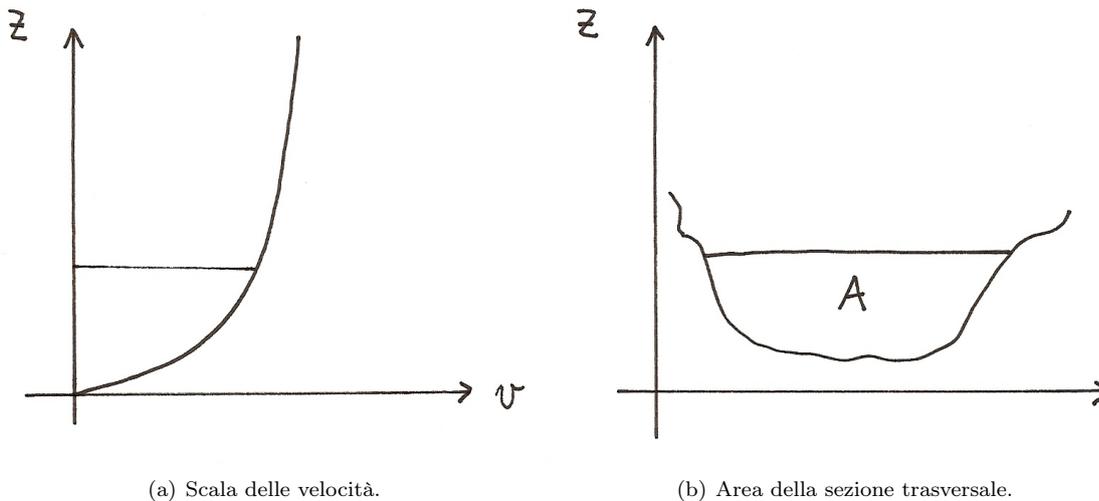


Figura 1.18: Stima di  $Z_0$ ,  $k$  e  $\alpha$ .

Supponendo il livello dell'acqua orizzontale e conoscendo la sezione trasversale del canale si valuta  $A$  in funzione di  $Z$ , mentre  $V$  viene estrapolata sulla base delle misure di velocità effettuate per piccoli valori di  $Z$ . Rispetto all'estrapolazione diretta di  $Q$  (metodo 3) l'estrapolazione di  $V$  è più sicura in quanto da un certo  $Z$  in poi  $V$  varia di poco.



(a) Scala delle velocità.

(b) Area della sezione trasversale.

Figura 1.19: Metodo 2 per la determinazione della scala delle portate.

3. Si estrapola, graficamente o analiticamente, la legge ricavata per le parti basse anche alle parti alte.

### Instabilità della scala delle portate

Se durante le *portate di piena* il fondo cambia assetto (mutamento delle barre di fondo) la scala delle portate non cambia di molto.

Se invece durante le *portate di magra* il fondo cambia assetto (si possono avere anche migrazioni del canale all'interno dell'alveo) la scala delle portate subisce forti variazioni sia nella sezione considerata sia per tutto un tronco di alveo a monte e a valle. Le portate di magra non sono importanti per la valutazione della sicurezza delle zone rivierasche bensì per la *valutazione della risorsa*: si può affermare infatti che il volume d'acqua che passa ogni anno per la sezione di misura è formato per metà da piene e per metà da magre ed esaurimenti.

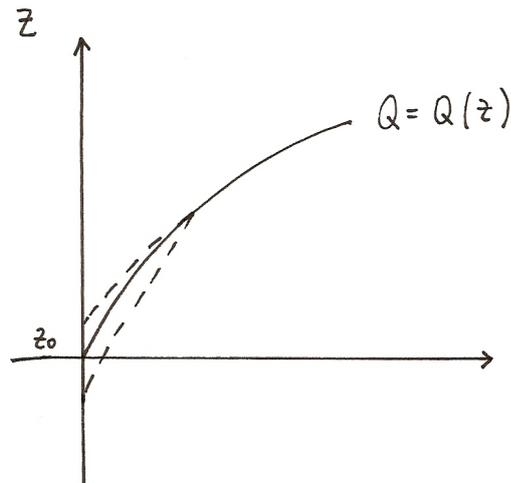


Figura 1.20: Instabilità della scala delle portate.



Figura 1.21: Alveo di magra.

#### 1.5.4 Sezioni stabili

Le misure di portata andrebbero fatte in corrispondenza delle cosiddette *sezioni stabili*, ossia quelle sezioni che, grazie al fondo sufficientemente rigido, non variano al passaggio dell'onda di piena:

- possono essere stabili per loro natura: emersione di roccia (soglie geologiche);
- possono essere rese stabili da opere di stabilizzazione trasversale:
  - traverse di presa;
  - briglie o soglie di stabilizzazione: specie di dighe piuttosto basse (meno di 15 m) che, realizzate a monte delle pile dei ponti, servono ad evitare i fenomeni di sottoerosione delle fondazioni.

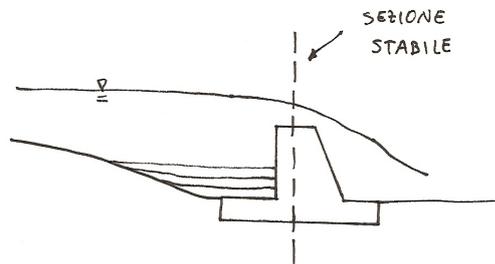
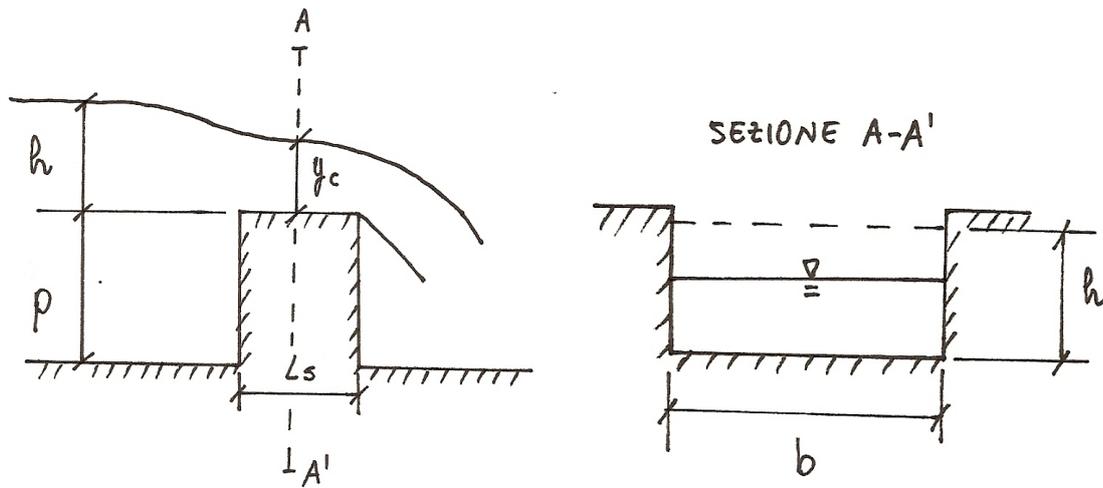


Figura 1.22: Sezione stabile.

#### Stramazzi

Nel caso in cui l'*efflusso sia libero*, ossia non condizionato dai livelli d'acqua a valle, allora la scala delle portate  $Q = Q(Z)$  è nota a priori. Si può infatti assimilare questo tipo di struttura a degli *stramazzi*: luci attraverso cui passa un flusso d'acqua che non sia sotto battente.



(a) Sezione longitudinale.

(b) Sezione trasversale.

Figura 1.23: Stramazzo in parete grossa.

Stramazzo rettangolare in parete grossa:

$$Q = 0,385Bh\sqrt{2gh} \tag{1.11}$$

Stramazzo rettangolare in parete sottile:

$$Q = C_Q Bh\sqrt{2gh} \tag{1.12}$$

con  $C_Q$  funzione delle condizioni di flusso e dalla spessore dello stramazzo.

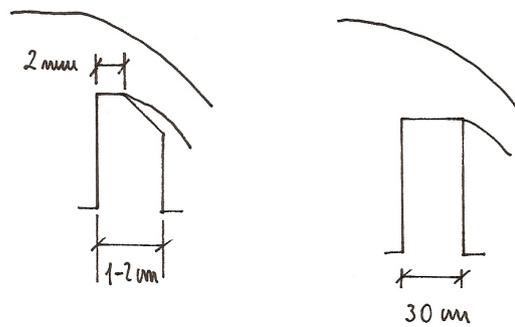


Figura 1.24: Stramazzo in parete sottile.

Stramazzo trapezoido in parete sottile:

$$Q = C_Q(B_0h + mh^2)\sqrt{2gh} \tag{1.13}$$

Stramazzo triangolare in parete sottile:

$$Q = C_Q mh^2\sqrt{2gh} \tag{1.14}$$

In generale sussiste un relazione del tipo:

$$Q = kh^\alpha \tag{1.15}$$

con:

- $\alpha = 1,5$  per sezioni rettangolari;
- $\alpha = 2,5$  per sezioni triangolari;

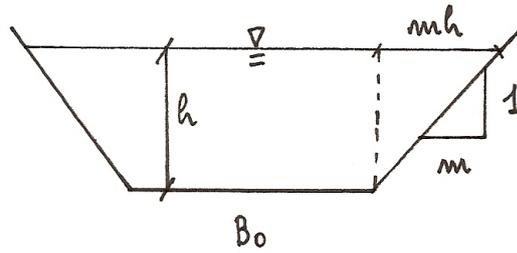


Figura 1.25: Sezione trapezia di uno stramazzo.

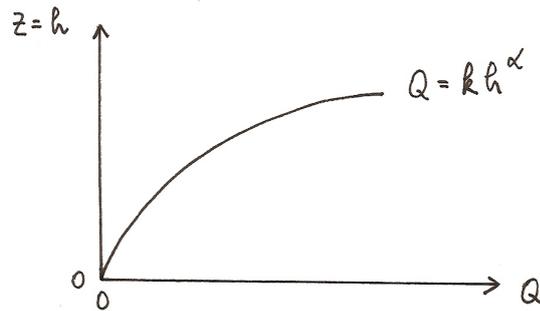


Figura 1.26: Relazione generale per gli stramazzi.

### Carico piezometrico e carico cinetico

Per essere esatti nelle espressioni viste il carico piezometrico  $h$  dovrebbe essere accompagnato da quello cinetico  $v^2/2g$ , tuttavia se il petto  $p$  dello stramazzo è almeno pari ad  $h$  allora il termine cinetico è trascurabile rispetto a quello piezometrico.

Bisogna tener conto del carico cinetico nei casi in cui, a causa dell'*alluvionamento* dell'alveo in seguito alla diminuzione di velocità a monte della traversa, il petto dello stramazzo diminuisce di molto.

Uno stramazzo funziona correttamente con *tiranti minimi* di 5 cm, sotto tale valore si hanno problemi dovuti a fenomeni di adesione.

È importante inoltre che i *filetti fluidi siano rettilinei* e che non ci siano quindi contrazioni laterali.

### 1.5.5 Misura mediante traccianti

Tale tipo di misura consiste nell'immettere una sostanza diluita nel corso d'acqua, generalmente cloruro di sodio o coloranti alimentari. La portata è pari a:

$$Q = q \frac{C_i - C_d}{C_d - C_b} \quad (1.16)$$

- $C_i$ : concentrazione iniettata;
- $C_d$ : concentrazione diluita (a valle);
- $C_b$ : concentrazione di base (a monte);
- $q$ : portata immessa.

Per poter effettuare una misura di questo tipo è necessario attendere di essere *a regime* con l'immissione e la diluizione (circa 30 minuti). La misura risulta precisa nei casi in cui:

- il canale non è così piccolo da essere misurato "a secchi";
- il canale non è così grande da rendere necessario l'utilizzo degli idrometri a mulinello.

Esiste anche una versione di tale misurazione con *diluizione ad impulso istantaneo*.

## 1.6 Evaporazione e misure di evaporazione

Consideriamo uno specchio d'acqua oppure un terreno saturo d'acqua.

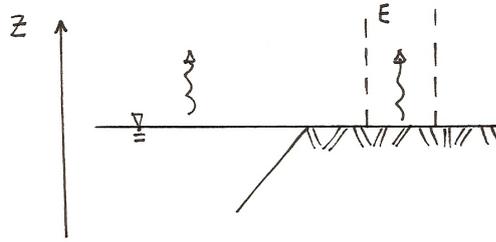


Figura 1.27: Evaporazione.

Se l'atmosfera al di sopra di tale superficie è ferma allora il *tasso di evaporazione*  $E$  (mm/h) è legato alla presenza di umidità nell'atmosfera. Il fenomeno dell'evaporazione è un classico fenomeno diffusivo e quindi segue la *prima legge di Fick*:

$$E = -K \frac{de}{dz} \quad (1.17)$$

-  $e$ : tensione di vapore;

-  $de/dz$ : gradiente verticale della tensione di vapore.

All'interno di una miscela di gas ogni componente ha una propria pressione che contribuisce a formare la pressione della miscela: la tensione di vapore  $e$  è la componente di pressione che riguarda il vapore acqueo. Sussiste infatti la *legge di Dalton*:

$$p = \sum_i p_i \quad (1.18)$$

In base alla *legge dei gas perfetti* si ha che:

$$e = \rho_v R_v T = 1,61 \rho_v R T \implies \rho_v = 0,622 \frac{e}{RT} \quad (1.19)$$

$\rho_v$  corrisponde alla densità del vapore acqueo ed è detta *umidità assoluta* [ $M/L^3$ ]. L'*aria umida*, avente una pressione  $p$ , è una miscela composta da *vapore acqueo*, avente pressione  $e$  e da *aria secca* (miscela di vari gas), avente pressione  $p - e$ . Ne consegue che:

$$\rho_m = \frac{p - e}{RT} + 0,622 \frac{e}{RT} = \frac{p}{RT} \left( 1 - 0,378 \frac{e}{p} \right) \quad (1.20)$$

Se  $e = 0$  allora  $\rho_{aria\ secca} = p/RT$ . Si noti come la densità dell'aria umida sia inferiore a quella dell'aria secca.

Si definisce *tensione di vapore saturo*  $e_s$  la massima umidità assoluta dell'aria a temperatura  $T$ . In corrispondenza di  $e_s$  si ha la densità dell'aria umida minima.  $e_s$  dipende da  $T$  attraverso l'*equazione di Clausius-Clapeyron*. In via approssimata si può assumere:

$$e_s = 6,112 \exp \left( \frac{17,67T}{T + 243,5} \right) \quad (1.21)$$

Si definisce *umidità relativa* (%):

$$r = \frac{e}{e_s} \quad (1.22)$$

L'umidità relativa può essere misurata sfruttando la modifica di certe proprietà di taluni materiali al suo variare (esempio: *igrometri a capello*), oppure mediante lo *psicrometro*.

### 1.6.1 Psicrometro

Lo psicrometro è costituito da due termometri, uno a bulbo secco ( $T_A$ ) ed uno a bulbo bagnato soggetto a ventilazione ( $T_B$ ). Si osserva che  $T_A > T_B$  in quanto la ventilazione produce un'evaporazione dal batuffolo di ovatta con conseguente estrazione di calore. La differenza di temperatura  $\Delta T = T_A - T_B$  dipende da quanta acqua riesce ad evaporare e dalla differenza di umidità  $\Delta E$  rispetto alla condizione di saturazione  $e_s$  (se  $r = 100\%$  allora  $T_A = T_B$ ).

Scrivendo l'*equilibrio termico*:

$$(T_A - T_B)(\rho c_p + \rho_v c_{pv}) = (\rho_s - \rho_v)L_e \quad (1.23)$$

- $c_p$ : calore specifico dell'aria secca a pressione costante;
- $L_e$ : calore latente di evaporazione

Supponendo che sia evaporata tutta la  $\rho_s - \rho_v$  allora:

$$r = \frac{e}{e_s} = 1 - \frac{c_p}{0,622} \frac{p}{e_s} (T_A - T_B) \left( 1 - \frac{0,622 c_{pv}}{c_p} \frac{e}{T} \right) \quad (1.24)$$

Definendo una temperatura virtuale detta *temperatura di rugiada* ( $^{\circ}\text{C}$ ):

$$T^* = \frac{T_A}{1 - 0,378e/p} \quad (1.25)$$

Si ottiene:

$$e_s = 6,11 + 0,61T^* \quad (1.26)$$

e:

$$r = \frac{e}{e_s} = 1 - 0,00066 \frac{p}{e_s} (T_A - T_B)(1 + 1,146T_B) \quad (1.27)$$

con  $p$  in mmHg e  $T$  in  $^{\circ}\text{C}$ .

Si ha in questo modo un sistema lineare di 3 equazioni (1.25, 1.26, 1.27) in 3 incognite ( $e$ ,  $e_s$  e  $T^*$ ).

### 1.6.2 Determinazione del tasso di evaporazione

Il tasso di evaporazione  $E$  può essere valutato seguendo 2 principi fondamentali:

1. fenomeno diffusivo + aria in movimento;
2. approccio energetico.

#### Approccio energetico

Isolando un sistema e facendo un bilancio energetico si ottiene la quantità di energia che è possibile spendere per l'evaporazione:

1. energia radiante (infrarossa);
2. scambi termici sotterranei;
3. riflessioni di energia da superfici;
4. radiazioni emesse;
5. energia condotta dall'atmosfera (calore sensibile);
6. evaporazione (calore latente).

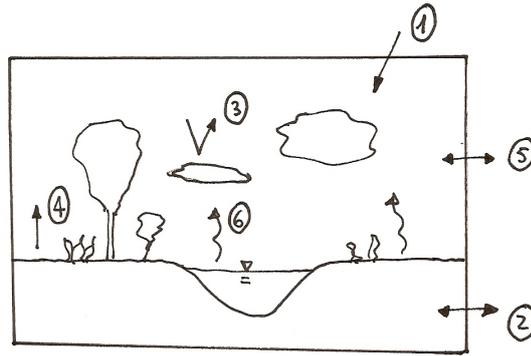


Figura 1.28: Bilancio energetico.

### Superfici d'acqua a pelo libero

Vale la seguente *formula di Rohuwer*, adatta soprattutto per i laghi:

$$E = 0,771(1,465 - 0,0005p)(0,44 + w) \frac{e_s - e}{1,33} \quad (1.28)$$

- $p$ : pressione atmosferica (hPa);
- $w$ : velocità media giornaliera del vento (Km/h);
- $e$ : tensione di vapore (hPa);
- $e_s$ : tensione di vapore saturo (hPa).

Vale la seguente *formula di Coutagne*:

$$E = \frac{e_s(1 - r)}{1,33(0,47 + 0,035T)} \quad (1.29)$$

- $E$ : tasso di evaporazione (mm/giorno) mediata nell'arco di un mese;
- $r$ : umidità relativa media mensile;
- $T$ : temperatura media mensile ( $^{\circ}\text{C}$ ).

### Superfici di terreno (evapotraspirazione)

Nella valutazione del tasso di evaporazione da superfici di terreno bisogna tener in conto l'effetto della *traspirazione* dei vegetali, i quali, per ottenere i nutrimenti necessari, prelevano l'acqua dal terreno con le radici e la trasportano fino alle foglie, dove evapora.

Con riferimento alla figura 1.29 analizziamo l'andamento del carico piezometrico durante il percorso che l'acqua compie. Inizialmente esso scende sotto il livello delle radici, si ha poi un aumento del carico grazie al *risucchio osmotico* operato dalle radici: l'acqua tende a muoversi dalla zona a minor concentrazione verso quella a maggior concentrazione attraverso una membrana permeabile. Lungo il fusto la perdita di carico non è molto elevata in quanto le fibre vegetali offrono una resistenza minima. Giunti alle foglie, grazie ai pori micrometrici di cui esse sono dotate, interviene il fenomeno della *capillarità*, il quale fornisce all'acqua una certa differenza di potenziale. L'organismo vegetale è in grado di regolare la portata a livello delle foglie variando il diametro dei tubicini di cellulosa che trasportano l'acqua. La traspirazione è quindi legata a tre fattori:

1. il tipo di *specie vegetale*;
2. la *stagione*;
3. la *disponibilità d'acqua* nel terreno.

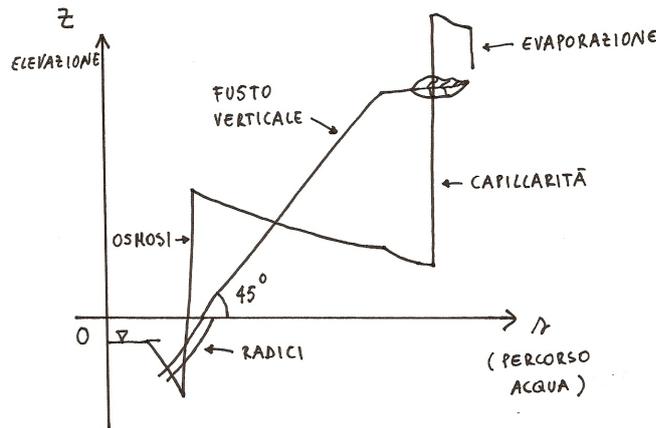


Figura 1.29: Traspirazione: andamento del carico piezometrico.

Si definisce *evapotraspirazione ET* la somma dell'evaporazione libera dal suolo e della traspirazione vegetale.

Si definisce *evapotraspirazione potenziale ETP* l'evaporazione che si avrebbe se il terreno fosse sempre in grado di fornire la completa disponibilità d'acqua alle specie vegetali.

Vale la seguente *formula di Penman*, necessitante di misure meteorologiche molto precise:

$$ETP = \frac{1}{\rho_e L_e \left( \frac{\Delta}{\gamma} + 1 \right)} \left[ \frac{\Delta}{\gamma} \bar{W} + L_e B (e_s^* - e^*) \right] \quad (1.30)$$

dove:

- $\rho_e$ : densità dell'acqua evaporata;
- $L_e$ : calore latente di evaporazione;
- $\Delta = de_s/dT$  (tabellato);
- $\gamma = c_{BP}$  con  $c_B$  costante di Bowen ( $\approx 6,1 \times 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ );
- $\bar{W} = \sum(Q_i - Q_u)/A$ : flusso netto di calore con cielo limpido (valore astronomico dipendente dalla stagione e dalla latitudine, tabellato);
- $B$ : coefficiente di trasferimento turbolento (in mm/giorno, tabellato).

Vale la seguente *formula di Penman giornaliera*:

$$ETP = \frac{\Delta \cdot H - 0,27 E'}{\Delta - 0,27} \quad [\text{mm/giorno}] \quad (1.31)$$

dove:

- $\Delta = de_s/dT$  (tabellato);
- $H = \bar{W}(1 - \varphi)(0,18 + 0,55S) - B[0,56 - 0,092(e_s r)^{0,5}](0,10 + 0,90S)$  (in mm/giorno);
- $r = e/e_s$ : umidità relativa;
- $\varphi$ : rapporto tra superfici riflettenti ed opache;
- $S$ : frazione di soleggiamento (tempo in cui il sole è visibile rispetto alla durata complessiva del giorno);
- $E' = 0,35e_s(1 - r)(1 + 0,0061w)$  (in mm/giorno);

- $w$ : distanza sfilata dal vento in un giorno all'altezza<sup>5</sup> di 2 m (espressa in Km);
- pressioni in mmHg (1 hPa=1 mmHg/1,33).

Vale la seguente *formula di Thornthwaite*, che fornisce la *ETP* media mensile:

$$ETP = 16 \left( \frac{10T_m}{\vartheta} \right)^a k \quad [\text{mm/mese}] \quad (1.32)$$

dove:

- $T_m$ : temperatura media del mese in cui si fa la stima di *ETP* (°C).
- $\vartheta$ : coefficiente numerico, detto *indice termico annuale*, che rappresenta la temperatura media nel mese considerato e negli undici precedenti:

$$\vartheta = \sum_{i=m-11}^m \left( \frac{T_i}{5} \right)^{1,514} \quad T_i > 0 \quad (1.33)$$

- $a = 6,75 \times 10^{-7} \vartheta^3 - 7,71 \times 10^{-5} \vartheta^2 + 1,79 \times 10^{-2} \vartheta + 0,4924$
- $k$ : coefficiente che dipende dal mese e dalla latitudine (tabellato);  $k \approx 1$  nel caso di latitudini nulle (equatore) e mese di 30 giorni, ad una latitudine di 45°  $k$  vale 0,8 a gennaio, 1,31 a luglio e 0,75 a dicembre.

### 1.6.3 Strumenti di misura

#### Evaporimetri

Sono serbatoi contenenti acqua a livello costante che misurano la quantità d'acqua che è necessario immettere per mantenere tale livello costante. Generalmente vengono disposti su galleggianti in mezzo ai laghi.

#### Lisimetri

Della porzione di terreno considerata si misurano gli scambi idrici:

- celle di pressione per il peso;
- piezometri all'esterno e regolatori di flusso per far variare il contenuto d'acqua all'interno del lisimetro;
- pluviometri;
- flussi sotterranei.

L'evaporazione viene ricavata per differenza. Sono strumenti tipici di stazioni di agricoltura sperimentale.

<sup>5</sup>Se le misure sono state effettuate ad una quota  $z$  diversa da 2 m si può ipotizzare un profilo logaritmico di vento:

$$w = w_z \cdot \frac{\log 2}{\log z}$$

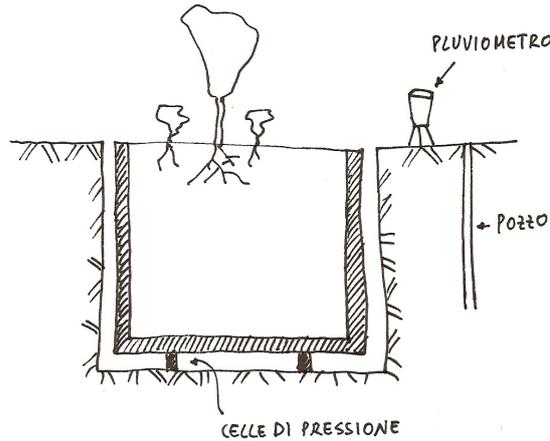


Figura 1.30: Lisimetro.

## 1.7 Infiltrazione e misure di infiltrazione

L'infiltrazione viene definita mediante il *tasso di infiltrazione*  $f$ : volume d'acqua che si infiltra attraverso l'unità di superficie del terreno nell'unità di tempo (mm/ora).

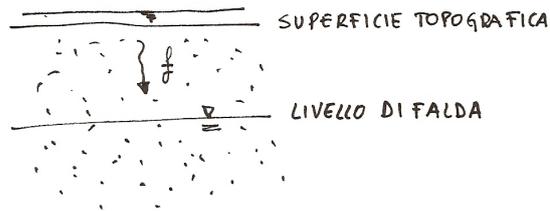


Figura 1.31: Infiltrazione.

### 1.7.1 Infiltrometro

È costituito da un cilindro metallico infisso nel terreno in cui viene versata dell'acqua con un battente di 1 cm, si misura la quantità d'acqua che è necessario immettere per mantenere il livello costante.

Per evitare che la misura venga falsata da moti di filtrazione non verticali si adottano gli *infiltrometri a doppia camicia*.

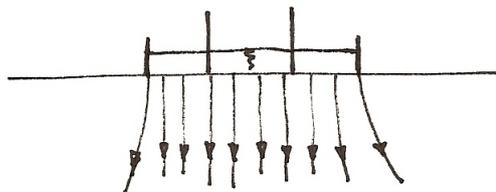


Figura 1.32: Infiltrometro a doppia camicia.

### 1.7.2 Legge di Horton

La legge di Horton afferma che il tasso di infiltrazione segue una legge decrescente di tipo esponenziale:

$$f = f_{\infty} + (f_0 - f_{\infty})e^{-t/k} \quad (1.34)$$

Si noti come:

$$\left. \frac{de^{-t/k}}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{k}e^{-t/k} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{k} \quad (1.35)$$

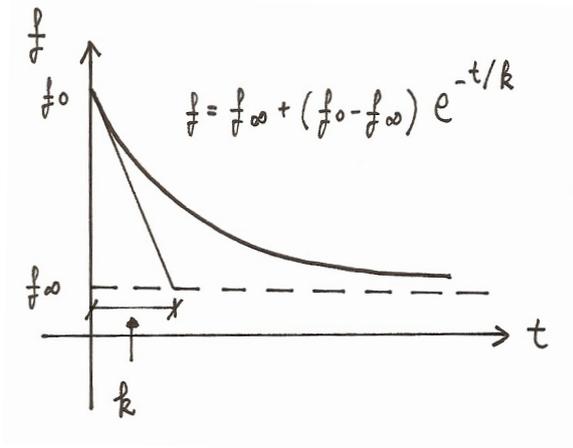


Figura 1.33: Legge di Horton.

### Infiltrazione e ruscellamento

Si definisce *capacità di campo* il massimo volume d'acqua assorbibile dal suolo. Ogni suolo è caratterizzato dal punto di vista della legge di infiltrazione di Horton dai parametri  $f_{\infty}$ ,  $f_0$  e  $k$ .

Consideriamo un suolo su cui piove con un'intensità di pioggia  $j$ . Si possono presentare 2 casi:

1.  $j < f$ : tutta la  $j$  s'infiltra ossia  $f_e = j < f$ ;
2.  $j > f$ : una parte di  $j$  s'infiltra ossia  $f_e = f < j$  mentre una parte  $r = j - f > 0$  o rimane in superficie, se questa è piana, o contribuisce al ruscellamento superficiale.

Si noti come la legge di Horton venga applicata direttamente a *bacini interi*, anche se questa nasce come legge puntuale; in questo caso si pone il problema del significato dei parametri  $t_{\infty}$ ,  $t_0$  e  $k$  per l'intero bacino.

### 1.7.3 Valutazione del ruscellamento superficiale

Nella valutazione del ruscellamento alla scala di un bacino con  $f$  s'intendono non solamente le acque che effettivamente s'infiltrano ma tutte quelle che *non ruscellano*, ossia anche quelle che evaporano (durante e dopo la pioggia) o che ristagnano.

#### Schema di Horton

Analizziamo una sequenza di piogge, come riportato in figura 1.34. Se si considerano le altezze medie di pioggia cadute in intervalli di tempo  $\Delta t$  costanti allora si può analizzare la sequenza in termini di intensità media semplicemente dividendo le altezze per  $\Delta t$ .

Per valutare il ruscellamento superficiale basta confrontare all'interno di ogni periodo l'intensità di pioggia con l'infiltrazione. Si possono presentare 2 casi principali.

1. Per effetto di precipitazioni precedenti  $f = \text{cost.}$  L'altezza d'acqua che s'infiltra in  $\Delta t$  è pari a:

$$F_1 = f \cdot \Delta t$$

2. Il tasso d'infiltrazione è decrescente mediante legge di Horton.

Si noti come per ogni  $\Delta t$  solitamente si prende il valore centrale di  $f$  e lo si considera costante su tutto l'intervallo di tempo.

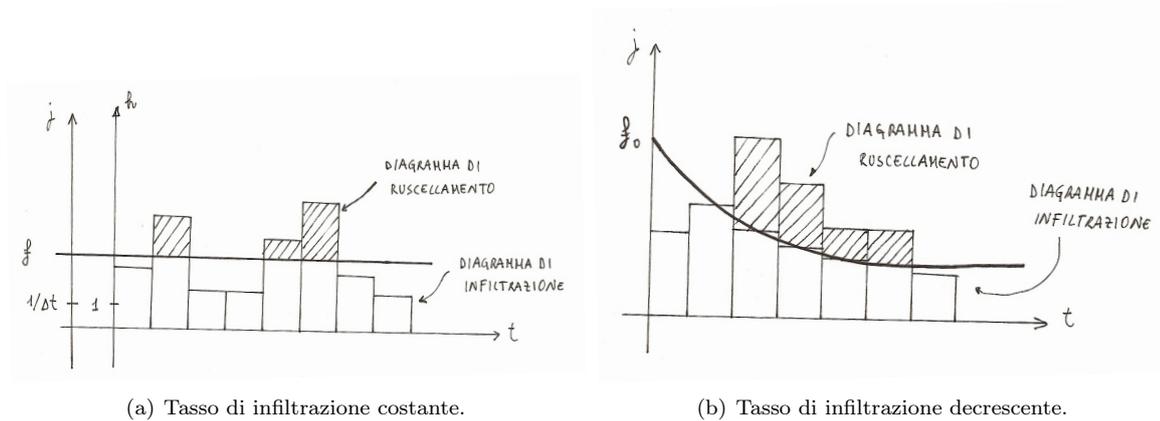


Figura 1.34: Schema di Horton.

### Schema ad area contribuyente

Si consideri un bacino idrografico su cui comincia a piovere con una certa intensità. Ovviamente sia l'intensità di pioggia, sia il tasso di infiltrazione, sia l'intensità di ruscellamento sono funzione sia dello spazio che del tempo:  $j = j(t, x)$ ,  $f = f(t, x)$ ,  $r = r(t, x)$ . Se si prescinde dalla dipendenza dello spazio e si considerano dei valori medi su tutto il bacino si trascura il fatto che:

- a fondo valle: la pendenza è piccola, l'acqua ristagna, il terreno è umido e si arriva a  $f_\infty$  abbastanza velocemente;
- nelle zone di spartiacque: la pendenza è elevata e si arriva a  $f_\infty$  molto lentamente.

Per tener conto di questo fatto si può pensare che l'area  $A_b$  del bacino sia formata da due sottoaree:

- *area assorbente*  $A'$ :  $f = f_0 \rightarrow \infty$  ossia tutta l'acqua che piove infiltra;
- *area contribuyente*  $A_c = A_b - A'$ :  $f = f_0 = 0$  ossia tutta l'acqua che piove ruscella.

Uno schema di tale tipo, alternativo a quello di Horton, è detto *schema ad area contribuyente*.

Si definisce *coefficiente d'afflusso* (alla rete idrografica):

$$\varphi = \frac{A_c}{A_b} = \frac{A_b - A'}{A_b} \tag{1.36}$$

I valori di  $\varphi$  si trovano tabellati in funzione del tipo di bacino (parchi:  $\varphi = 0,1 \div 0,2$ , centri commerciali:  $\varphi = 0,7 \div 0,9$ ).

La *portata di pioggia* vale:

$$Q_p = j \cdot A_b \tag{1.37}$$

La *portata di infiltrazione* vale:

$$Q_{inf} = j \cdot A' \tag{1.38}$$

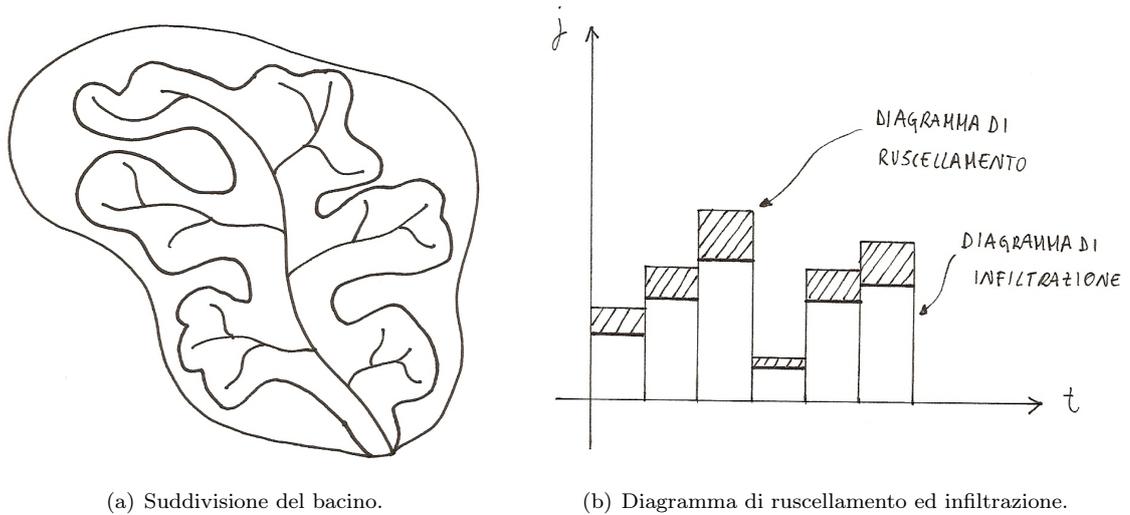


Figura 1.35: Schema ad area contribuyente.

La portata di ruscellamento vale:

$$Q_r = j \cdot A_c \quad (1.39)$$

L'intensità di ruscellamento media sul bacino vale:

$$r = \frac{Q_r}{A_b} = j \frac{A_c}{A_b} = \varphi \cdot j \quad (1.40)$$

Il tasso effettivo di infiltrazione vale:

$$f_e = j - r = j \cdot (1 - \varphi) \quad (1.41)$$

Le differenze principali tra questo modello e quello di Horton sono:

- nello schema ad area contribuyente l'intensità di pioggia può essere piccola a piacere ma c'è sempre un quantità di ruscellamento;
- la legge di Horton è variabile nel tempo mentre il coefficiente di deflusso è inteso come una costante.

La scelta di quale schema utilizzare dipende dal tipo di bacino:

- bacini con grosse diversità di copertura del terreno (es. fognature urbane) sono ben rappresentati dallo schema ad area contribuyente;
- bacini agricoli uniformi dal punto di vista della copertura vegetale sono ben rappresentati dallo schema di Horton.

## 1.8 Risposta idrologica

Uno dei problemi centrali dell'idrologia è la determinazione dei *deflussi* causati in una data sezione di un corso d'acqua dagli *afflussi* meteorici al bacino idrografico corrispondente.

L'analisi della relazione esistente tra piogge e portate, ossia la cosiddetta *trasformazione afflussi-deflussi* o *risposta idrologica*, è di fondamentale importanza in quanto le *misure di deflusso* presentano *difficoltà* e *costi* di molto superiori alle rispetto alle misure di precipitazione.

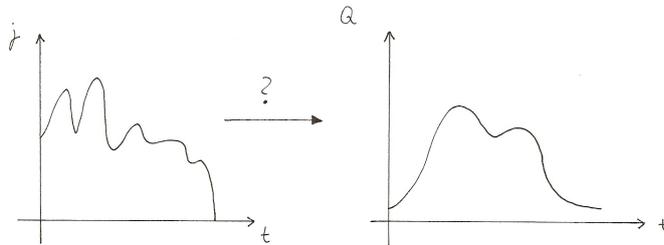


Figura 1.36: Risposta idrologica.

Le relazioni viste in precedenza per la valutazione dell'intensità di ruscellamento, nel caso dei due schemi, rappresentano cosa succede in un punto rappresentativo di tutto il bacino. Da qui a passare alla valutazione della portata il ruscellamento deve essere prima raccolto e trasportato sino alla sezione  $S_0$  dove si vuole valutare  $Q$ . Esse permettono quindi solamente di dire che il volume d'acqua affluito alla rete è pari al volume d'acqua defluito dalla sezione  $S_0$  di chiusura del bacino:

$$A_b \int_0^d r(t) dt = \int_0^\infty Q(t) dt \quad (1.42)$$

Dal momento che le portate nei corsi d'acqua continuano per un certo tempo dopo che la precipitazione è cessata significa che la risposta idrologica deve venir rappresentata mediante leggi:

- esaurienti nell'interpretare il fenomeno;
- semplici.

Questa trasformazione viene analizzata in termini di *sistemi lineari*. Prima di poter effettuare tale operazione bisogna semplificare l'idrogramma in uscita attraverso la cosiddetta *separazione dell'idrogramma*.

### 1.8.1 Separazione dell'idrogramma

Si vuole effettuare una separazione dell'idrogramma in base alla diversa provenienza delle acque che formano la portata. L'idrogramma è costituito da:

- *deflusso di base* ( $Q_{base}$ ): legato all'esaurimento delle sorgenti;
- *ramo di risalita*;
- *colmo di piena*;
- *ramo di discesa*: legato allo svuotamento dei canali;
- *ramo di esaurimento*.

Per poter effettuare la separazione dell'idrogramma tra:

- ✓ *risposta rapida*, legata alla portata di ruscellamento ( $Q_R$ );
- ✓ *risposta ritardata* o *differita*, legata all'esaurimento delle falde attraverso la portata di base ( $Q_B$ );

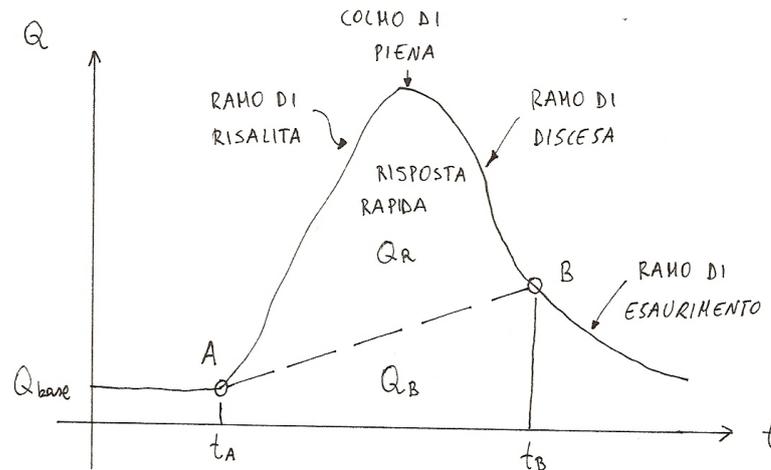


Figura 1.37: Separazione dell'idrogramma.

è necessario individuare:

- punto A: facilmente individuabile in quanto l'idrogramma in questo punto è caratterizzato da un netto cambiamento di pendenza;
- punto B: da questo punto in poi le portate non sono più legate al ruscellamento superficiale ma solo al deflusso profondo;
- la linea congiungente A con B: si ipotizza, in maniera del tutto convenzionale, essere una retta.

### Regime di esaurimento delle sorgenti

Dall'analisi delle sorgenti si è potuto osservare che dopo i periodi piovosi la portata decresce in maniera esponenziale, le sorgenti hanno quindi un *regime di esaurimento* esprimibile mediante la legge:

$$Q_s = Q_s(t) = Q_0 e^{-t/k} \quad (1.43)$$

Ammettendo che il ramo di esaurimento sia dominato solamente dal regime di esaurimento delle sorgenti, è possibile individuare il punto B e quindi il tempo  $t_B$  corrispondente effettuando la trasformata logaritmica di  $Q(t)$  (e basta) e fittando quindi i dati con la retta:

$$\ln Q_s(t) = \ln Q_0 - t/k \quad (1.44)$$

### 1.8.2 Separazione dello ietogramma

Si definisce ietogramma l'andamento delle piogge nel tempo. La pioggia può essere scomposta in 3 componenti:

1. *pioggia efficace*: contribuisce alla portata di risposta rapida  $Q_R$  (*deflusso rapido*);
2. *alimentazione delle falde*: contribuisce alla portata di base  $Q_B$ ;
3. *perdite*: contribuiscono all'evapotraspirazione  $ET$ .

D'ora in poi ci si occuperà solamente della trasformazione della pioggia efficace ( $j = j_e$ ), ottenuta o mediante l'applicazione dello schema di Horton o di quello ad area contribuyente, in deflusso rapido ( $Q(t) = Q_R(t)$ ).

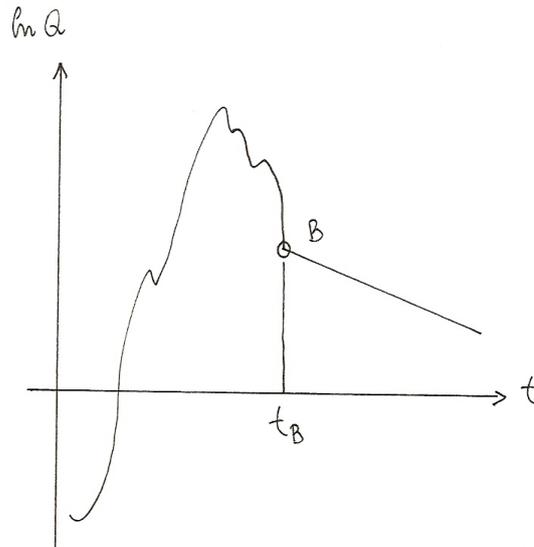


Figura 1.38: Regime di esaurimento delle sorgenti.

### 1.8.3 Funzione di risposta del bacino

#### Ipotesi di modello lineare

Tutto ciò che succede nel bacino e che fa sì che, a partire da una pioggia efficace, si abbia un certo deflusso rapido viene inglobato in quella che prende il nome di *funzione di risposta del bacino*.

Dal momento che si suppone il *modello lineare* essa gode di 3 proprietà:

1. *conservazione della massa*:

$$A_b \int_0^d j_e(t) dt = \int_0^\infty Q_R(t) dt \tag{1.45}$$

2. *proporzionalità*:

$$j_1(t) \longrightarrow Q_1(t) \text{ allora } m \cdot j_1(t) \longrightarrow m \cdot Q_1(t) \tag{1.46}$$

3. *additività*:

$$\left. \begin{array}{l} j_1(t) \longrightarrow Q_1(t) \\ j_2(t) \longrightarrow Q_2(t) \end{array} \right\} \implies j_1(t) + j_2(t) \longrightarrow Q_1(t) + Q_2(t) \tag{1.47}$$

#### Idrogramma unitario istantaneo - IUH

Si definisce *impulso unitario* o *impulso di Dirac* un evento piovoso avente le seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} j \rightarrow \infty \\ dt \rightarrow 0 \\ h = 1 \end{cases} \tag{1.48}$$

La funzione di risposta viene solitamente data come *risposta all'impulso unitario*, e successivamente, a partire da questa e sfruttando la convoluzione, è possibile ricavare la funzione di risposta (idrogramma) per un qualsiasi segnale di pioggia in entrata. Una tale funzione di risposta  $u(t)$  è detta *idrogramma unitario istantaneo* (IUH - Instantaneous Unit Hydrograph).

Dal momento che l'equazione di continuità deve valere anche per l'idrogramma unitario istantaneo si ha:

$$\int_0^\infty u(t) dt = 1 \tag{1.49}$$

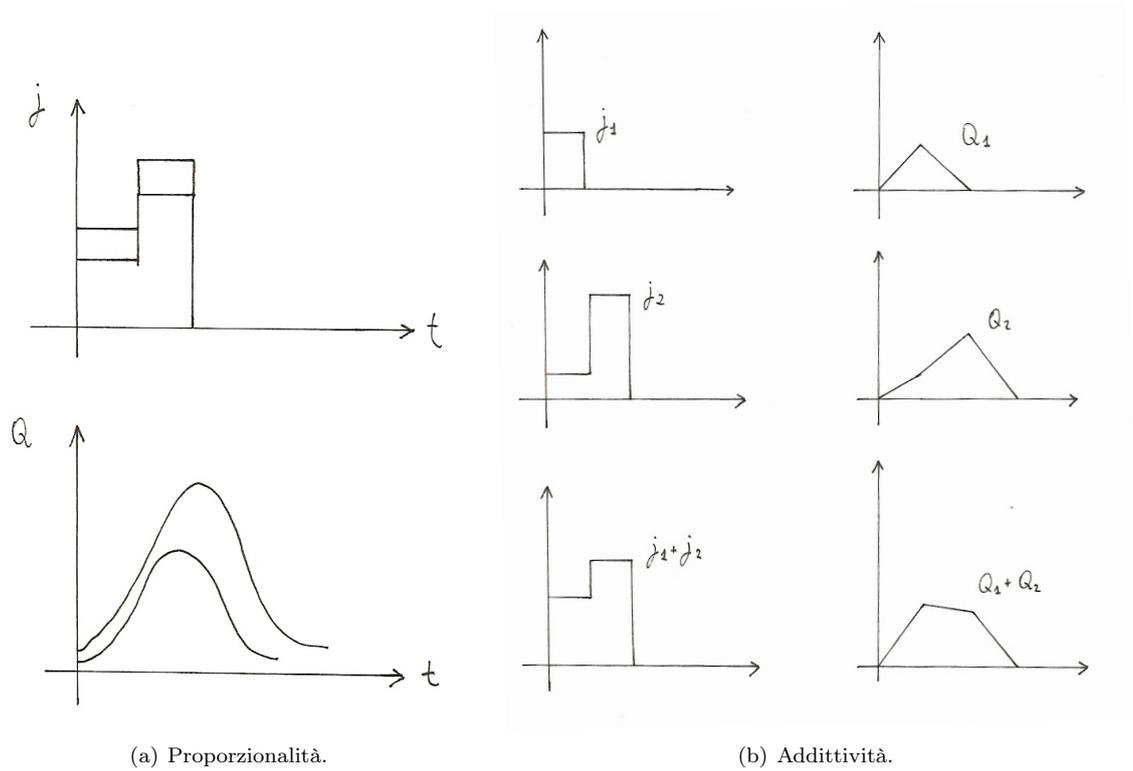


Figura 1.39: Proprietà dei sistemi lineari.

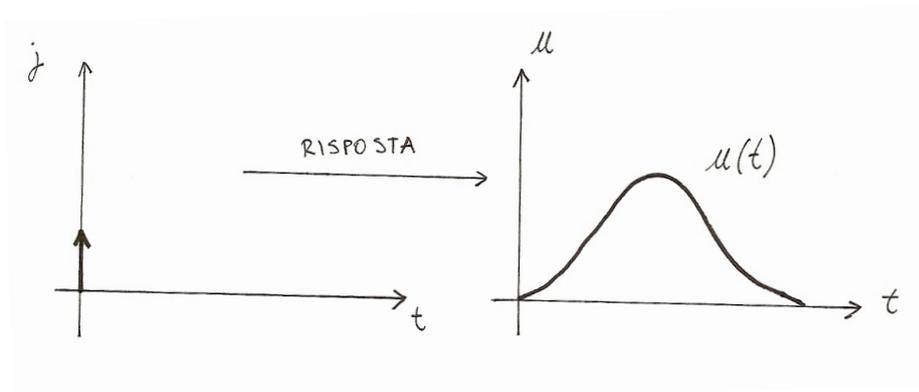


Figura 1.40: Idrogramma unitario istantaneo.

Ne consegue che  $u(t)$  ha le dimensioni di  $[T^{-1}]$ .

Dal momento che non si possono avere portate negative, l'idrogramma istantaneo unitario applicato ai bacini idrografici deve essere tale che:

$$u(t) \geq 0 \quad \forall t \quad (1.50)$$

Se si vuole ottenere la portata  $Q$  in  $m^3/s$  allora bisogna far sì che il tasso di ruscellamento superficiale sia espresso in tale unità di misura, in particolare esprimendo l'area del bacino  $A_b$  in  $Km^2$  e l'intensità di pioggia efficace  $j_e$  in  $mm/h$  si deve effettuare la seguente trasformazione:

$$r(t) = \frac{1}{3,6} A_b j_e \quad (1.51)$$

### Convoluzione

Per ottenere la portata  $Q(t)$  ossia *la funzione di risposta* si deve procedere alla convoluzione dell'idrogramma istantaneo unitario con il tasso di ruscellamento superficiale (il quale agisce come una specie di moltiplicatore), ossia si deve risolvere il cosiddetto *integrale di convoluzione*<sup>6</sup>:

$$Q(t) = r(t) * u(t) = \int_0^t r(\tau)u(t - \tau) d\tau \quad (1.52)$$

dove:

- $t$ : istante in cui si vuole valutare la  $Q(t)$ ;
- $\tau$ : istante in cui cade la pioggia;
- $t - \tau$ : la risposta alla pioggia che cade in  $\tau$  parte dal valore 0 in corrispondenza di  $t = \tau$ , ossia è traslata di una quantità pari a  $\tau$ .

Nota quindi  $u(t - \tau)$  e nota la pioggia  $r(t)$  si risolve questo integrale, generalmente per via numerica in quanto  $r(t)$  non è analitica, e si ottiene la funzione di risposta del bacino.

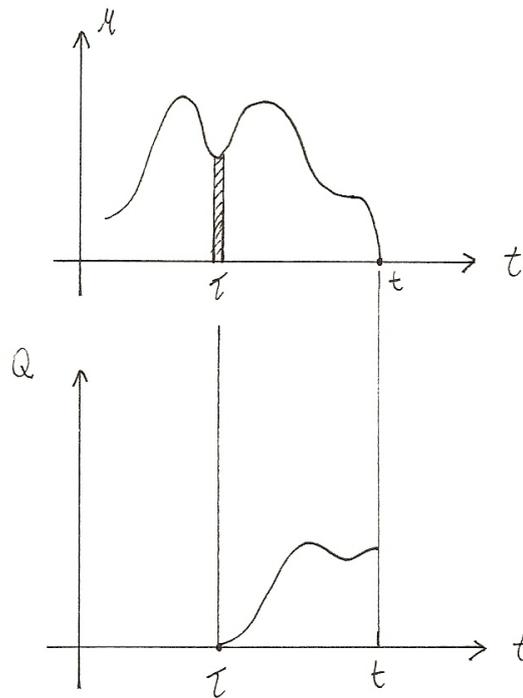


Figura 1.41: Convoluzione.

<sup>6</sup>Tale affermazione potrebbe essere dimostrata sia sfruttando le proprietà dei sistemi lineari sia l'interpretazione probabilistica dello IUH.

### Idrogramma unitario - UH

Dal momento che il segnale  $r(t)$  è costante su intervalli  $\Delta t$  l'integrale di convoluzione si *semplifica* leggermente:

$$\begin{aligned} Q(K\Delta t) &= \int_0^{\Delta t} r(\tau)u(t-\tau) d\tau + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} r(\tau)u(t-\tau) d\tau + \dots + \int_{(K-1)\Delta t}^{K\Delta t} r(\tau)u(t-\tau) d\tau = \\ &= r_1 \int_0^{\Delta t} u(t-\tau) d\tau + \dots + r_k \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} u(t-\tau) d\tau + \dots + r_K \int_{(K-1)\Delta t}^{K\Delta t} u(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Ponendo  $\theta = t - \tau$  si ha  $d\theta = -d\tau$  e gli estremi di integrazione diventano  $\theta_{\text{inf}} = [K - (k - 1)]\Delta t$  e  $\theta_{\text{sup}} = (K - k)\Delta t$ , quindi, considerando solamente il termine  $k$ -esimo, si ha:

$$r_k \int_{(K-k)\Delta t}^{(K-k+1)\Delta t} u(\theta) d\theta = r_k \cdot w_{K-k+1} \quad (1.53)$$

dove:

- $r_k$ : intensità di ruscellamento nel  $k$ -esimo  $\Delta t$ ;
- $w_{K-k+1}$ : "peso"  $K-k+1$ -esimo, i pesi  $w_i$  (adimensionali) sono tali che:

$$\sum w_i = 1 \quad (1.54)$$

In questo modo l'integrale di convoluzione si riduce ad una ben più semplice *sommatoria pesata di convoluzione*:

$$Q_K = \sum_{i=1}^K r_i \cdot w_{K-i+1} \quad (1.55)$$

La sequenza dei pesi  $w_i$  è detta *idrogramma unitario* (UH - Unit Hydrograph).

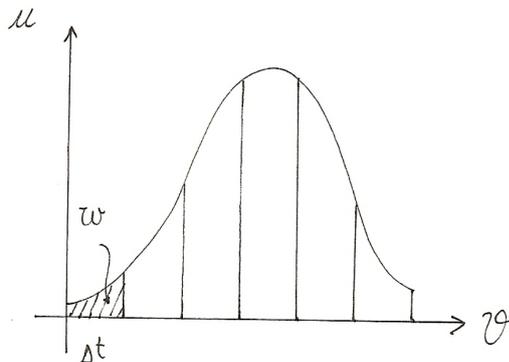


Figura 1.42: Determinazione dell'idrogramma unitario.

Dal punto di vista storico l'idrogramma unitario è stato introdotto negli anni '30 mentre l'idrogramma unitario istantaneo negli anni '60 (Nash). La differenza fondamentale fra i due è che lo IUH è una caratteristica universale del bacino idrografico mentre lo UH dipende anche dal passo  $\Delta t$  adottato per il segnale in ingresso.

## 1.9 Modelli di idrogramma

Per il calcolo pratico della risposta idrologica di un bacino ad un evento piovoso si distinguono due fasi:

1. definizione dello IUH o dello UH del bacino: proprietà del bacino idrografico che può essere ottenuta integralmente per via sperimentale oppure mediante modelli teorici basati su parametri sperimentali;
2. risoluzione dell'integrale di convoluzione o della sommatoria di convoluzione per una determinata pioggia (generalmente di intensità costante e durata limitata).

### 1.9.1 Metodo sperimentale

Permette di ottenere l'idrogramma unitario UH di un bacino idrografico, noti che siano un ietogramma ed il relativo idrogramma sperimentale.

- a) Si effettua la misurazione di un evento mediante misuratori di pioggia e di livello, si ottengono quindi lo ietogramma e l'idrogramma.
- b) Si effettua la separazione dell'idrogramma ottenendo  $Q_R(t)$  e quindi  $V_R$  (volume di ruscellamento pari al volume dovuto alla risposta rapida).
- c) Si effettua la separazione dello ietogramma determinando  $r(t)$ :
  - 1° modo: applicando lo schema di Horton si cerca  $f$  (costante) tale che il volume d'afflusso sia pari al volume di ruscellamento:

$$f : V_A = V_R$$

- 2° modo: applicando lo schema ad area contribuyente si cerca  $\varphi$  tale:

$$\varphi : V_{tot} = \int_0^d j dt = \frac{h \cdot A_b}{1000} \implies \varphi = \frac{V_R}{V_{tot}}$$

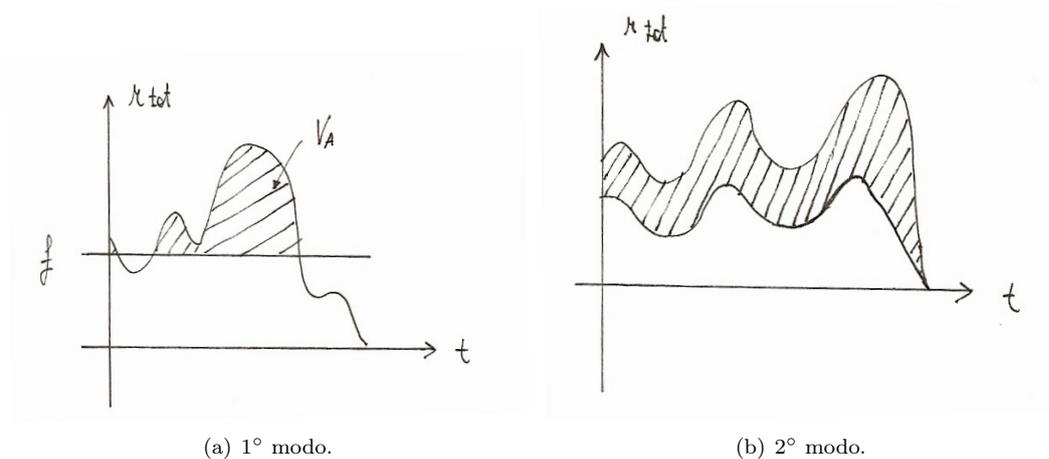


Figura 1.43: Separazione dello ietogramma.

- d) Si effettua la cosiddetta *deconvoluzione* ossia si risolve (nel senso dei minimi quadrati) un sistema lineare sovradimensionato con *incognite* i pesi  $w_k$ , ossia:

$$\sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2 = \min \quad \varepsilon_k = Q_k - x_k \quad x_k = \sum_{i=1}^k r_i \cdot w_{k-i+1} \quad (1.56)$$

dove:

- $x_k$ : portate calcolate;
- $Q_k$ : portate misurate.

### 1.9.2 Modello della corrivazione o cinematico

In tale modello si osserva che esiste ed è unico il percorso che l'acqua percorre e che congiunge un punto  $P$  qualsiasi del bacino alla sezione di chiusura  $S_0$ . Tale percorso è caratterizzato da una velocità di percorrenza  $\bar{v}(x)$  che non dipende né dall'intensità di pioggia né dallo stato di saturazione del bacino, essa è quindi una costante nel tempo del percorso<sup>7</sup>.

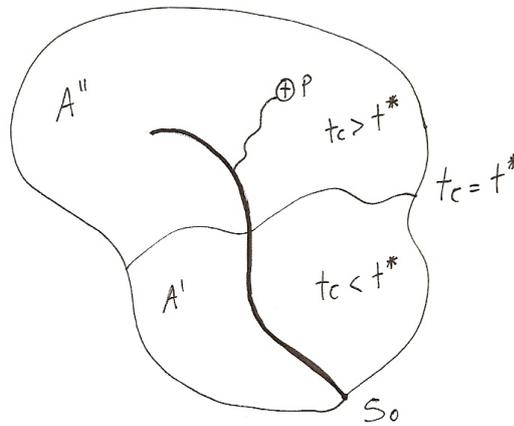


Figura 1.44: Metodo cinematico.

Si definisce *tempo di corrivazione* del punto  $P$  il tempo che la goccia di pioggia che cade in tale punto impiega a raggiungere la sezione di chiusura  $S_0$ , tempo che è costante in quanto la velocità è costante:

$$t_c = t_{\text{percorrenza } P \rightarrow S_0} = \frac{L}{\bar{v}} \quad (1.57)$$

Si definiscono *linee isocorrive* i luoghi dei punti che hanno il medesimo tempo di corrivazione.

Per ricavare l'idrogramma unitario istantaneo IUH conviene far riferimento non alla funzione di impulso unitario bensì alla sua funzione integrale, ossia alla *funzione scalino unitario o di Heaviside*.

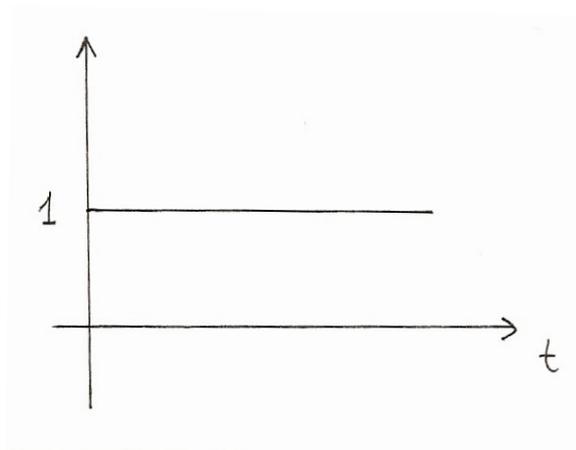


Figura 1.45: Funzione di Heaviside.

<sup>7</sup>Si noti come la velocità di percorrenza possa variare all'interno del percorso in quanto la velocità sui versanti è di un ordine di grandezza inferiore a quella nei canali.

Una volta ricavata la funzione di risposta  $s(t)$  a tale funzione calcolandone la derivata si può risalire alla funzione di risposta impulsiva:

$$u(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{1.58}$$

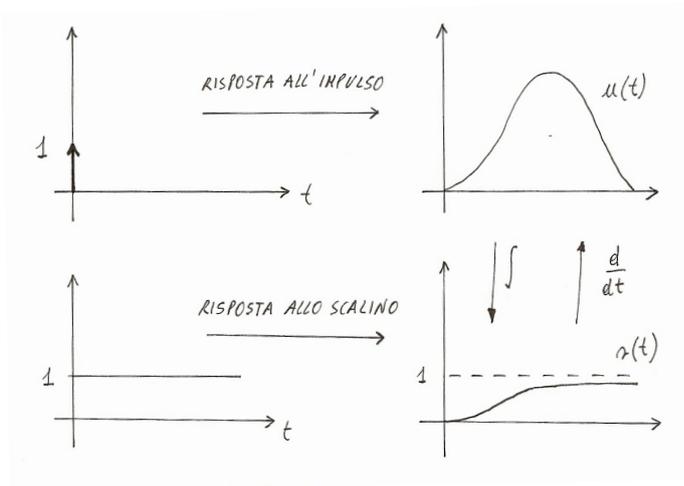


Figura 1.46: Risposta impulsiva e risposta alla funzione di Heaviside.

Si consideri quindi una pioggia, rapportata direttamente all'area del bacino, che possa essere rappresentata da una funzione di Heaviside.

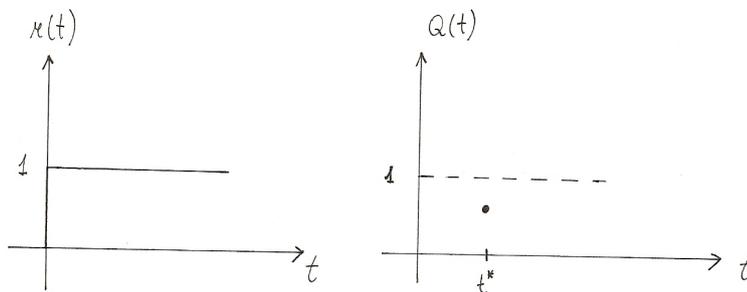


Figura 1.47: Ricerca della risposta alla funzione di Heaviside.

Al tempo  $t^*$  l'acqua che è caduta fino a quel momento si è messa in moto verso la sezione  $S_0$ , considerando la pioggia che è caduta al tempo  $t = 0$  si possono distinguere 3 casi:

1. la pioggia caduta lungo l'isocorriua  $t_c = t^*$  esce dalla sezione al tempo  $t^*$ ;
2. la pioggia caduta sopra l'isocorriua  $t_c = t^*$  al tempo  $t^*$  deve ancora uscire dalla sezione  $S_0$ ;
3. la pioggia caduta sotto l'isocorriua  $t_c = t^*$  al tempo  $t^*$  è già uscita dalla sezione  $S_0$ .

Con riferimento alla figura 1.44:

- porzione  $A'$ : sta alimentando l'uscita dal bacino
- porzione  $A''$ : è ancora in moto verso l'uscita.

Ne consegue che al generico tempo  $t$  la portata in uscita vale:

$$Q(t) = r \cdot \frac{A'(t)}{A_b} \tag{1.59}$$

Per ricavare la risposta del bacino è sufficiente tracciare quindi la funzione delle aree  $A'$ , adimensionalizzate rispetto all'area  $A_b$ , rispetto al tempo.

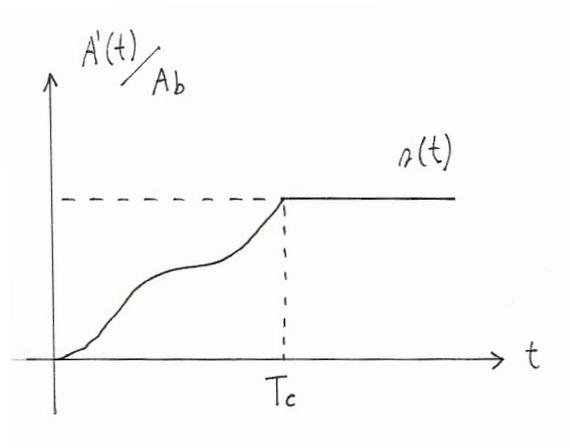


Figura 1.48: Funzione delle aree adimensionalizzate  $A'/A_b$ .

Tale funzione è crescente all'aumentare del tempo in quanto le aree  $A'$  aumentano, finchè si arriva al punto idraulicamente più distante dalla sezione  $S_0$ . Si definisce *tempo di corrivazione o di risposta del bacino*  $T_c$  il massimo dei tempi di corrivazione del bacino:

$$T_c = \max_{A_b}(t_c) \quad (1.60)$$

#### Modello della corrivazione lineare

Il metodo della corrivazione lineare si presta bene ad essere applicato alle reti di canali irrigui e alle fognature. Esso ipotizza che la *funzione di risposta* alla funzione di Heaviside sia di tipo *lineare*:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/T_c & 0 \leq t \leq T_c \\ 1 & t > T_c \end{cases} \quad (1.61)$$

Ne consegue che l'idrogramma unitario istantaneo è definito da:

$$IUH = u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1/T_c & 0 \leq t \leq T_c \\ 0 & t > T_c \end{cases} \quad (1.62)$$

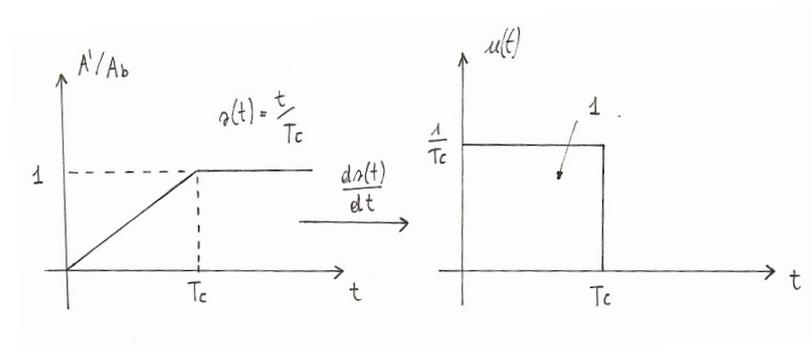


Figura 1.49: Metodo della corrivazione lineare: semplificazione introdotta.

Consideriamo quindi il caso di una *pioggia con intensità costante*  $r(t) = r$  (in  $\text{m}^3/\text{s}$ ) di durata limitata  $d$ .

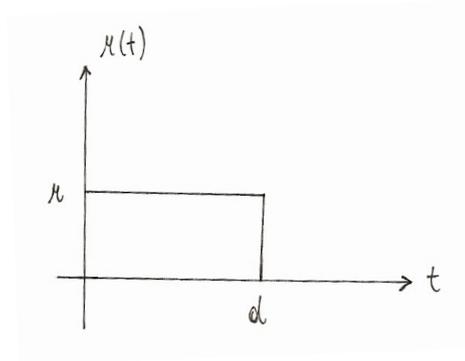


Figura 1.50: Funzione di impulso.

Per ricavare la funzione di risposta conviene pensare la funzione  $r$  come somma di due funzioni scalino una positiva ed una negativa, calcolare le rispettive funzioni di risposta ed effettuare la somma algebrica delle due.

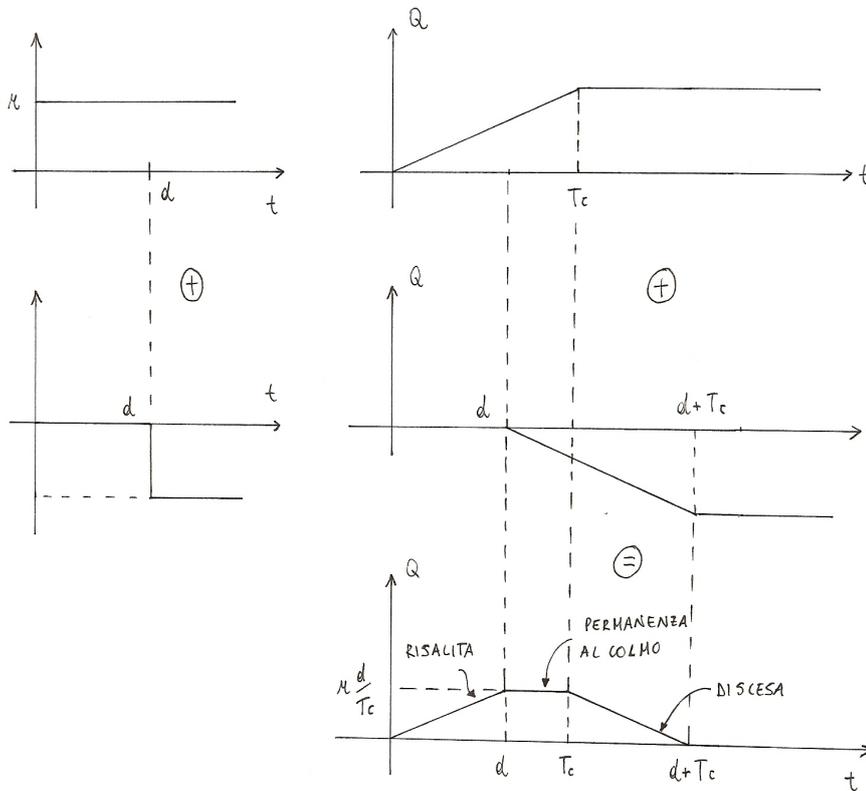


Figura 1.51: Metodo della convoluzione lineare: calcolo della funzione di risposta per  $d < T_c$ .

Si possono presentare 3 casi:

1.  $d < T_c$ : la portata al colmo vale:

$$Q_{max} = r \cdot \frac{d}{T_c} = r \cdot \varepsilon \tag{1.63}$$

dove:

- $\varepsilon$ : *coefficiente di attenuazione della piena.*

2.  $d > T_c$ : la portata al colmo vale:

$$Q_{max} = r$$

3.  $d = T_c$ : la portata al colmo vale:

$$Q_{max} = r \tag{1.64}$$

L'onda di piena è di tipo triangolare (isoscele).

Il metodo delle corrivazione lineare è completamente definito dal parametro  $T_c$ . Il tempo di corrivazione è tuttavia un *concetto generale*, che si applica a tutti i modelli di idrogramma e che equivale al tempo necessario affinché abbia termine lo IUH.

### Formula di Giandotti per la stima del tempo di corrivazione di un bacino

La *formula di Giandotti*, proposta dall'ing. Giandotti negli anni '30 e facente parte del cosiddetto metodo di Giandotti per la determinazione delle portate fluviali (oramai caduto in disuso), fornisce una *stima del tempo di corrivazione di un bacino*:

$$T_c = \frac{4\sqrt{A_b} + 1,5L}{0,8\sqrt{H_m - Z_0}} \tag{1.65}$$

dove:

- $T_c$ : tempo di corrivazione del bacino in ore;
- $A_b$ : area del bacino in Km<sup>2</sup>;
- $L$ : lunghezza dell'asta principale in Km;
- $H_m$ : altitudine media del bacino in m:

$$H_m = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} Z(x, y) dx dy$$

- $Z_0$ : quota della sezione di chiusura del bacino (zero idrometrico) in m.

Dividendo sopra e sotto per  $\sqrt{L}$  si ottiene:

$$T_c = \frac{4\sqrt{A_b/L} + 1,5\sqrt{L}}{0,8\sqrt{(H_m - Z_0)/L}} \tag{1.66}$$

si può quindi osservare che il tempo di corrivazione di un bacino è direttamente proporzionale alla dimensione della larghezza ed alla dimensione longitudinale ed inversamente proporzionale alla pendenza.

Per determinare l'altitudine media di un bacino a partire dalla carta topografica che lo rappresenta:

1. si considera una curva di livello e si trova l'area del bacino avente altitudine maggiore;
2. si effettua questa operazione per varie curve di livello ottenendo la cosiddetta *curva ipsografica del bacino*;
3. si cerca il valore medio di tale curva ossia, con riferimento alla figura 1.52,  $H_m$  tale che  $V_1 = V_2$ .

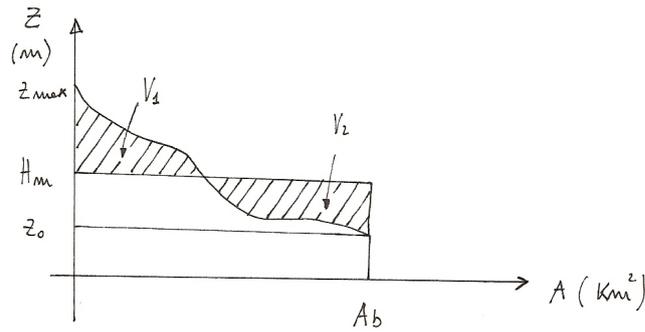


Figura 1.52: Determinazione dell'altitudine media di un bacino idrografico mediante la curva ipsografica.

### 1.9.3 Modello italiano o dell'invaso lineare

Un *invaso* è un serbatoio da cui esce dell'acqua, essa può uscire da:

- uno stramazzo:

$$Q = C_Q k h \sqrt{2gh} \propto h^{3/2}$$

- una luce di fondo sotto battente:

$$Q = C_Q \omega \sqrt{2gh} \propto h^{1/2}$$

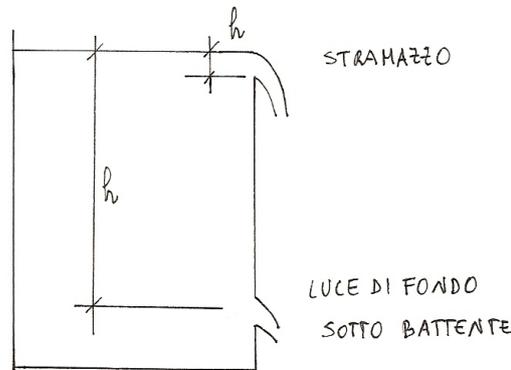


Figura 1.53: Stramazzo e luce di fondo sotto battente.

Se immaginiamo l'invaso come un serbatoio cilindrico di volume  $W$  allora:

$$Q = Q(W) \begin{cases} \text{attraverso una relazione con } h^{3/2} \\ \text{attraverso una relazione con } h^{1/2} \end{cases}$$

L'invaso lineare è una via di mezzo tra questi due invasi, ossia si ha:

$$Q = Q(W) = \frac{W}{k} \quad \text{con } k = [T] \tag{1.67}$$

Con tale metodo si immagina il bacino come un immenso serbatoio lineare dove la portata uscente è funzione del volume immagazzinato nel bacino<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Si noti che a questo punto si ragiona già in termini di afflusso efficace, il bacino è già per così dire impermeabile e quindi le componenti di infiltrazione ed evapotraspirazione sono già state scontate.

### Determinazione dello IUH

Si ricava ora direttamente la risposta all'impulso, costituito dal riempimento istantaneo a  $t = 0$  con un volume  $W = 1$ . Per fare ciò è necessario disporre di un'equazione che descriva l'andamento della portata nel tempo, essa può essere facilmente ottenuta applicando l'equazione di continuità al bacino:

$$\frac{dW}{dt} = Q_{in} - Q \implies k \frac{dQ}{dt} = -Q \implies \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{k} dt \implies d(\ln Q) - \frac{dt}{k} \implies \ln Q = -\frac{t}{k} + \text{cost}$$

Applicando la condizione iniziale:  $Q(0) = 1/k$ , si ottiene:

$$u(t) = Q(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k} \quad (1.68)$$

È di immediata verifica<sup>9</sup> che lo IUH così definito gode delle proprietà dell'idrogramma unitario istantaneo.

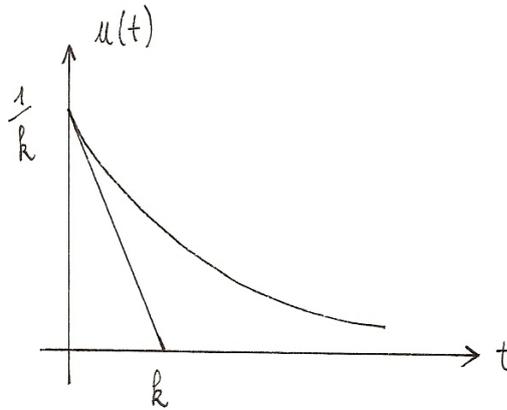


Figura 1.54: Portata in uscita da un invaso lineare.

### Determinazione dell'idrogramma di risposta ad una pioggia costante di durata limitata

Si può verificare che la risposta alla funzione scalino di durata  $d$  e afflusso  $R$  è costituita da:

- ramo di risalita:

$$Q(t) = R(1 - e^{-t/k}) \quad (1.69)$$

- ramo di discesa:

$$Q(t) = Q_{\max} e^{-(t-d)/k} \quad (1.70)$$

La portata al colmo si ottiene per  $t = d$ :

$$Q_{\max} = R(1 - e^{-d/k}) = R \cdot \varepsilon < r \quad (1.71)$$

---

<sup>9</sup>

$$u(t) \geq 0 \quad \forall t \quad \text{perchè } k \geq 0 \wedge e^{-t/k} > 0$$

$$\int_0^{\infty} u(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{k} e^{-t/k} dt = -e^{-t/k} \Big|_0^{\infty} = e^{-t/k} \Big|_0^{\infty} = 1 - \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t/k} = 1 - 0 = 1 \quad \square$$

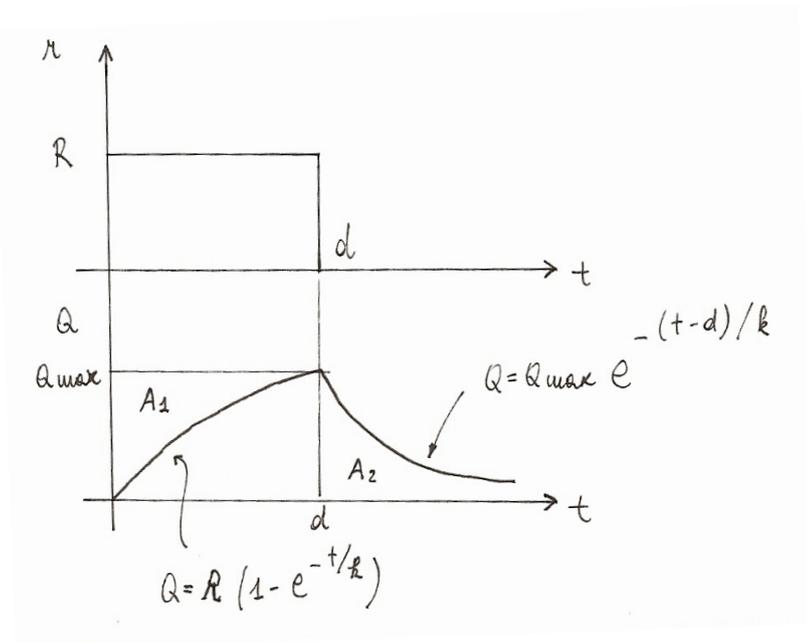


Figura 1.55: Metodo dell'invaso lineare: funzione di risposta.

Con riferimento alla figura 1.55 si ha che  $A_1$  (corrispondente al volume di pioggia che entra nel bacino e viene immagazzinato) deve essere uguale a  $A_2$  (corrispondente al volume di pioggia che comincia ad uscire una volta che l'evento è finito).

Il metodo dell'invaso lineare è completamente definito dalla *costante di invaso*  $k$ :

$$k = \frac{W}{Q} \tag{1.72}$$

Si noti come per entrambi i metodi lineari il colmo di piena si ha nel momento in cui la pioggia termina. La differenza principale fra i due metodi è invece:

- metodo dell'invaso lineare :  $\varepsilon = 1 \iff d \rightarrow \infty$
- metodo della corrivazione lineare :  $\varepsilon = 1 \iff d \geq T_c$

Ricaviamo ora analiticamente le espressioni 1.69, 1.70 e 1.71 relative alla portata  $Q(t)$  in uscita nel caso di afflusso  $R$  costante per una durata pari a  $d$ . Si distinguono due casi.

- Ramo di risalita:  $0 \leq t \leq d$ .

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_0^t R \frac{1}{k} e^{-(t-\tau)/k} d\tau = R \int_0^{t/k} e^{-t/k} e^{\tau/k} d(\tau/k) = \\ &= R e^{-t/k} \int_0^{t/k} e^x dx = R e^{-t/k} [e^{t/k} - 1] = R [1 - e^{-t/k}] \end{aligned}$$

La portata al colmo vale:

$$Q_{\max} = Q(d) = R [1 - e^{-d/k}] = R \cdot \varepsilon$$

Il fattore  $\varepsilon < 1$  è detto *fattore di attenuazione della portata in uscita*. Esso tiene conto del cosiddetto *effetto d'invaso*, ossia del fatto che l'acqua viene trattenuta dall'invaso e ceduta piano piano nei tempi successivi.

- Ramo di discesa:  $t > d$ .

$$Q(t) = Q(d) e^{-(t-d)/k} = R \varepsilon e^{-(t-d)/k} = R [1 - e^{-d/k}] e^{-t/k} \cdot e^{d/k} = R [e^{d/k} - 1] e^{-t/k}$$

### 1.9.4 Modello di Nash o modello gamma

Il modello di Nash opera con una *successione di n serbatoi lineari*, aventi tutti la medesima costante di tempo  $k$ :

$$Q_i = \frac{W_i}{k} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (1.73)$$

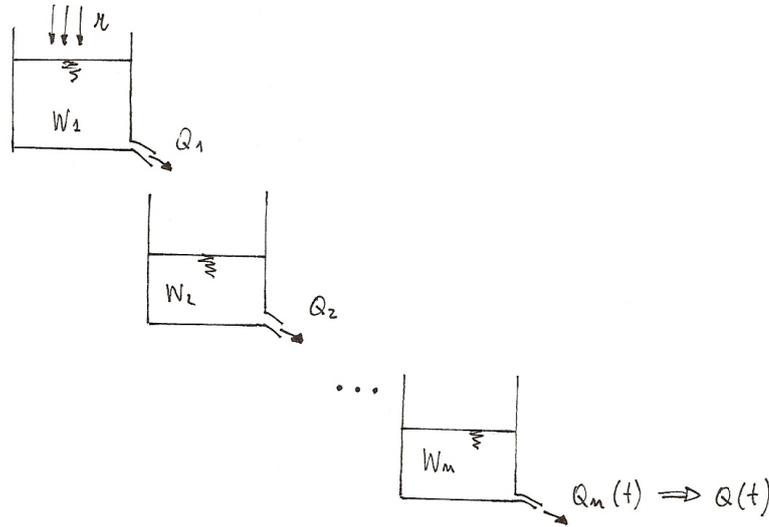


Figura 1.56: Modello di Nash.

Applicando a ciascun serbatoio l'equazione dell'invaso:

$$\frac{dW_i}{dt} = Q_{i-1} - Q_i \quad (1.74)$$

ed integrando in successione queste equazioni si ottiene  $Q(t)$ .

#### IUH di Nash

Per valutare lo IUH nel suo complesso si deve applicare ricorsivamente la regola che fornisce lo IUH dell'insieme di due elementi posti l'uno in serie all'altro. Per brevità si riporta solamente il risultato finale, ossia il cosiddetto *IUH di Nash*:

$$u(t) = \frac{1}{k\Gamma(n)} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k} \quad (1.75)$$

La funzione  $\Gamma(n)$  corrisponde per  $n \in \mathbb{N}$  a  $(n-1)!$ . Essa tuttavia è definita anche per  $n \in \mathbb{R}$ , quindi, per ricavarne l'espressione analitica, basta imporre la condizione:

$$\Gamma(n) : \int_0^{\infty} u(t) dt = 1 \quad (1.76)$$

Si ottiene:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{t}{k}\right)^{n-1} e^{-t/k} d(t/k) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-x} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = 1$$

da cui:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (1.77)$$

Dal momento che questo integrale non dà luogo ad una forma analitica esso può essere risolto solo numericamente.

**Stima dei coefficienti  $n$  e  $k$**

I coefficienti  $n$  e  $k$  possono essere visti rispettivamente come dei *parametri di forma* (numero di serbatoi) e *tempo* (costante di invaso).

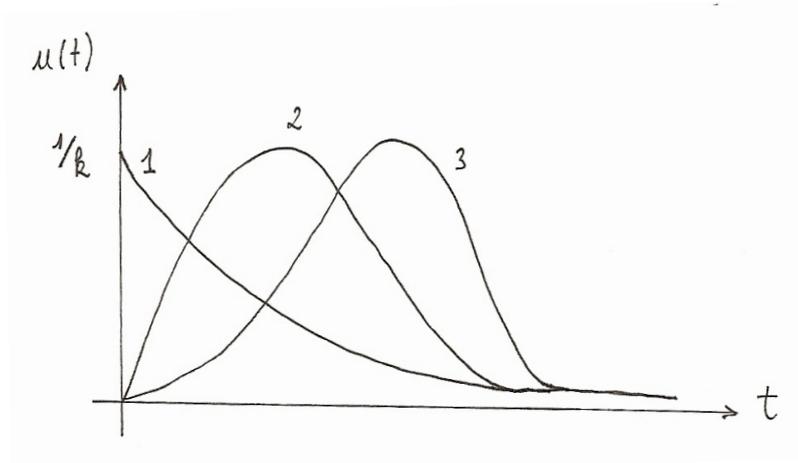


Figura 1.57: IUH di Nash per  $n = 1, 2, 3$  (qualitativo).

Essi sono difficilmente correlabili ad una particolare geometria del bacino, vengono quindi determinati sulla base di misurazioni di  $Q$  e di  $j$ . Il procedimento per ricavarli si sviluppa in più fasi.

1. Si effettua la separazione dell'idrogramma:  $Q = Q_R + Q_b$ .
2. Si effettua la separazione dello ietogramma ricavando l'intensità di pioggia efficace/affluente.
3. Si trasforma la pioggia efficace  $j$  in afflusso mediante la relazione:

$$r = \frac{1}{3,6} j A_b$$

4. Si effettua un confronto tra la portata registrata  $Q_R$  e la portata stimata  $\hat{Q}$ :

$$\hat{Q}(t) = \int_0^t r(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Si definisce l'errore al tempo  $t$  come:

$$\delta_t(n, k) = Q_R(t) - \hat{Q}(t)$$

I valori ottimali di  $n$  e  $k$  si ottengono imponendo la condizione:

$$\sum_{t=1}^N \delta_t^2(n, k) = \min \tag{1.78}$$

Si tratta di un *problema non lineare ai minimi quadrati*.

Dal momento che le piogge sono registrate ad intervalli di tempo costante conviene lavorare con l'idrogramma unitario a passo temporale costante. Bisogna quindi calcolare i pesi  $w_k$ :

$$w_k = \int_{(k-1)\Delta t}^{k\Delta t} u(t) dt \tag{1.79}$$

Poichè, come si è visto, l'integrale non è analitico, per il suo calcolo si possono adottare, per esempio, due diversi metodi numerici di approssimazione:

- Metodo dei *trapezi*:

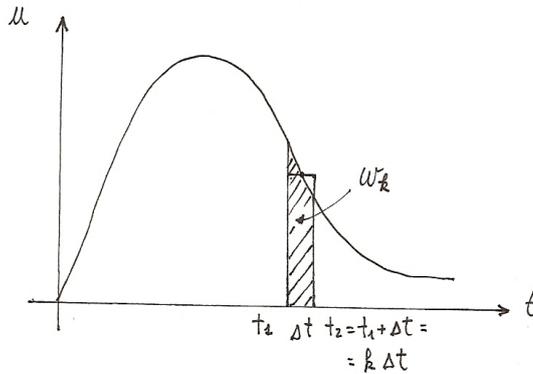
$$w_k \approx \frac{u(t_{k-1}) + u(t_k)}{2} \cdot \Delta t \quad (1.80)$$

- Metodo del *punto medio*:

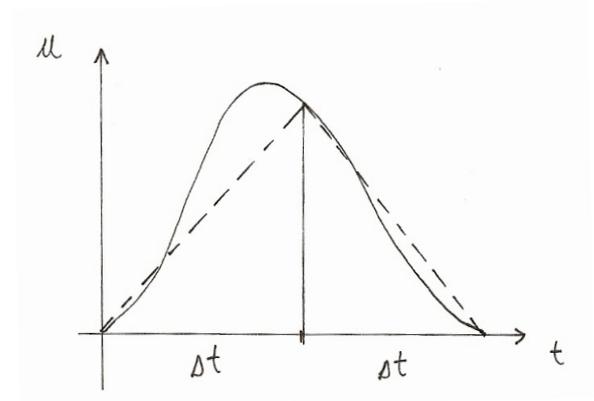
$$w_k \approx u(t_{k-1} + \Delta t/2) \cdot \Delta t$$

Ovviamente queste approssimazioni sono accettabili solamente se  $\Delta t \ll k$  (costante d'invaso). Nel caso contrario bisogna spezzare l'intervallo di tempo in tanti sottointervalli ed effettuare la somma dei pesi calcolati sui sottointervalli:

$$w_{\Delta t} = \sum_1^{10} w_{\Delta \tau} \quad \text{con } \Delta \tau = \Delta t/10$$



(a)  $\Delta t \ll k$ .



(b)  $\Delta t > k$

Figura 1.58: Calcolo approssimato dei pesi.

Una volta nota la sequenza di pesi  $w_k$  si può calcolare la portata:

$$\hat{Q}_t = \sum_{i=1}^t r_i w_{t-i+1} \quad (1.81)$$

### 1.9.5 Interpretazione probabilistica dell'idrogramma unitario istantaneo

Si è visto che la funzione  $u(t)$  gode delle proprietà:

$$\begin{cases} u(t) \geq 0 \quad \forall t \\ \int_0^{+\infty} u(t) dt = 1 \end{cases}$$

Ne consegue che l'idrogramma unitario istantaneo può essere interpretato come una *funzione di densità di probabilità* (PDF), la cui variabile aleatoria associata è un tempo e viene detto *tempo di residenza o di ritardo del bacino*  $T_r$ .

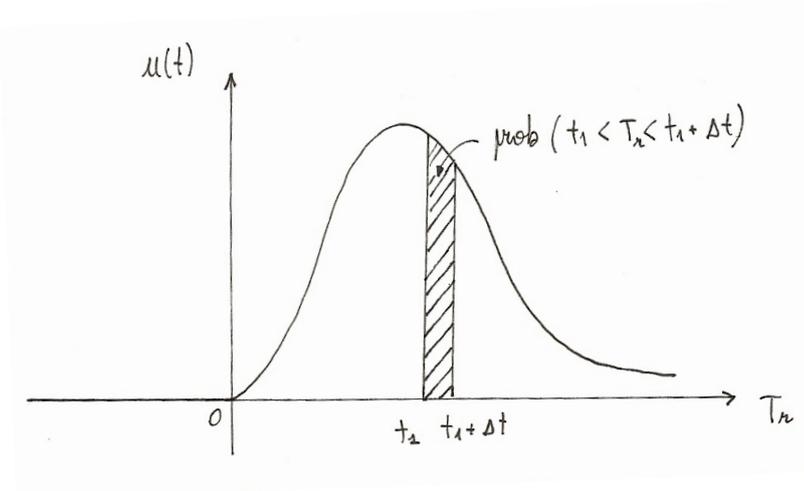


Figura 1.59: Interpretazione probabilistica dello IUH di Nash (Distribuzione di Pearson - III tipo).

Il tempo di residenza rappresenta l'intervallo di tempo che intercorre tra la caduta a terra di una goccia qualsiasi e la sua restituzione alla sezione di chiusura del bacino. L'aleatorietà del processo sta nel fatto che dal momento che la goccia d'acqua viene scelta a caso essa può cadere ovunque e quindi fare un percorso qualsiasi.

Esistono vari metodi di interpretazione probabilistica dello IUH. Nel caso dello IUH di Nash esso rappresenta una funzione di densità di probabilità caratterizzata da due parametri ( $n$  e  $k$ ) che viene detta *distribuzione di Pearson del III tipo* o *distribuzione gamma incompleta a 2 parametri*.

## 1.10 Esercizi

### 1.10.1 Determinazione dell'idrogramma di Nash

#### Dati

- $A_b$ : area del bacino idrografico;
- $\phi$ : coefficiente d'afflusso;
- $n, k$ : parametri dello IUH-Nash;
- serie temporale di piogge a  $\Delta t = 1$  ora per 25 ore.

#### Incognite

- $Q(t)$ : idrogramma.

#### Svolgimento (concettuale)

1. Separazione dello ietogramma mediante il coefficiente d'afflusso:

$$p_{eff} = p \cdot \phi$$

2. Trasformazione delle piogge efficaci in portate:

$$R = \frac{1}{3,6} A_b p_{eff}$$

3. Calcolo dei pesi  $w_j$  (approssimazione dell'integrale mediante metodo del punto medio):

$$w_j = \Delta t \cdot \frac{1}{k\Gamma(n)} \left( \frac{(j-0,5)\Delta t}{k} \right)^{n-1} e^{-\frac{(j-0,5)\Delta t}{k}}$$

4. Convoluzione:

$$Q(t) = \sum_{i=1}^t r_i w_{t-i+1}$$

## Capitolo 2

# Statistica degli estremi

### 2.1 Generalità

L'andamento nel tempo dei fenomeni piovosi e delle portate nei fiumi è fortemente oscillante. Il transito di una piena comporta sempre:

- spostamento di materiale in alveo;
- asportazione dei vegetali in alveo;
- erosione concentrata in corrispondenza delle strutture rigide presenti in alveo.

Il dimensionamento delle opere fluviali deve essere tale da consentire il passaggio di *eventi di piena di una certa entità*, i quali quindi devono essere in qualche modo valutati.

#### 2.1.1 Metodo della curva inviluppo

In passato il metodo adottato dal Genio Civile era quello di valutare una piena comunque grande mediante la costruzione delle cosiddette curve inviluppo. Una *curva inviluppo* è una curva che nel piano  $A_b, Q_{colmo}/A_b$  sottende tutti i punti corrispondenti ad eventi misurati. Le opere che dovevano

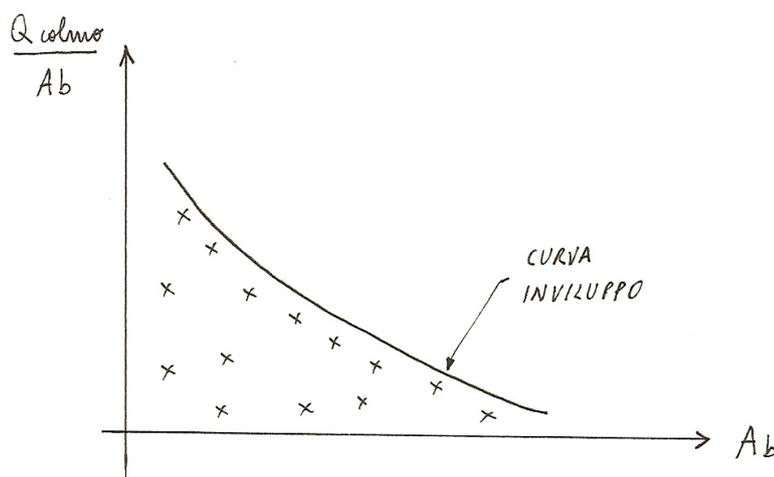


Figura 2.1: Curva inviluppo.

essere costruite erano dimensionate per sopportare una portata al colmo ottenuta come funzione dell'area del bacino preso in esame mediante la curva inviluppo.

I difetti principali di questo metodo erano:

- man mano che le osservazioni aumentavano qualche punto cominciava a cadere oltre la curva inviluppo precedentemente tracciata, con la conseguenza che le opere realizzate fino a quel momento non erano adeguate alla nuova piena;
- man mano che le osservazioni aumentavano le opere da realizzare aumentavano di dimensione;
- non teneva conto del tipo di area in cui il fiume passava (e quindi del rischio associato).

### 2.1.2 Probabilità associata all'evento di piena

Associando una *probabilità ad un evento di piena* si passa dal considerare una *portata comunque grande*, concetto estremamente debole dal punto di vista statistico, all'associare un certo *rischio* ad un determinato evento di piena.

Il rischio è dato dal “prodotto” di 3 fattori:

$$\text{rischio} = \text{probabilità (evento)} \times \text{valore esposto} \times \text{esposizione}$$

- Probabilità associata all'evento: dipende dall'*idrologia delle piene*.

Può essere diminuito mediante la costruzione di opere strutturali: casse di espansione, . . . .

- Il valore di ciò che è esposto: dipende dalla *politica urbanistica*.

Può essere diminuito evitando di mettere attività ricche in zone suscettibili di allagamenti. I cosiddetti *piani di bacino* servono a porre dei vincoli urbanistici che tengano conto dell'assetto fluviale.

- L'esposizione: dipende da interventi non strutturali.

Può essere diminuito mediante procedure di allarme meteorologico e piani di evacuazione adeguati.

Noi ci concentreremo sulla valutazione del *rischio idrologico*, ossia della probabilità che capiti un evento causante danni.

### 2.1.3 Richiami di probabilità

#### Probabilità

La probabilità associata ad un evento è un numero compreso tra 0 e 1. Si immagini un esperimento (esempio: il lancio di una moneta), a seguito del quale viene effettuata una misura  $x$ . Il campo della probabilità è quello che permette di associare una probabilità ad una classe di uscita sull'esito dell'esperimento, prima che questo venga fatto.

#### Variabili aleatorie

Nell'ingegneria civile ed ambientale si opera con *variabili aleatorie* generalmente appartenenti ad  $\mathbb{R}^+$ . La variabile aleatoria è indicata con la lettera maiuscola  $X$  mentre il valore numerico della misura con la lettera minuscola  $x$ .

#### Funzione di probabilità cumulata

La probabilità di non superamento di un determinato valore  $x$  è una funzione di  $x$  che viene detta *funzione di probabilità cumulata* (CDF- Cumulative Distribution Function) (adimensionale):

$$CDF = F_X(x) = \text{prob}(X \leq x) \tag{2.1}$$

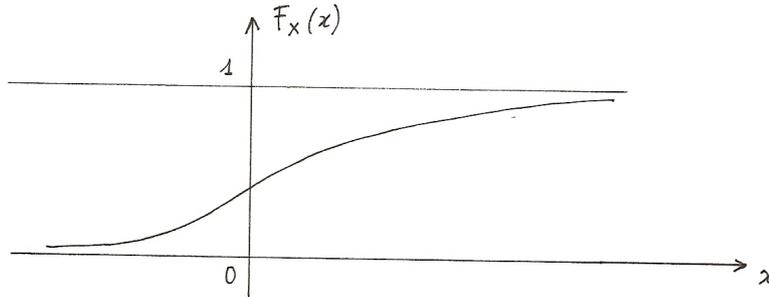


Figura 2.2: Funzione di probabilità cumulata.

### Funzione di densità di probabilità

La probabilità di contenimento in un intervallo è definita da:

$$\text{prob}(x \leq X \leq x + \Delta x)$$

essa dipende oltre che da  $x$  anche da  $\Delta x$  e quindi risulta poco utile, al contrario invece della *funzione di densità di probabilità* (PDF - Probability Density Function):

$$PDF = f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{prob}(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

È evidente che:

$$f_X(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F_X(x + \Delta x) - F_X(x)}{\Delta x} = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

La dimensione di  $f_X(x)$  è quindi  $[x]^{-1}$ .

### Quiz

Consideriamo una circonferenza di raggio  $r$  ed il triangolo equilatero in essa inscritto, il cui lato vale  $\sqrt{3}r$ . Supponendo di tracciare una retta a caso che tagli la circonferenza definendo una corda di lunghezza  $c$ , si vuole sapere:

$$\text{prob}(c > \sqrt{3}r) = ?$$

È possibile ragionare in 3 modi.

1. Considerando un fascio di rette parallele si ottiene:

$$\text{prob}(c > \sqrt{3}r) = 1/2$$

2. Considerando un fascio di rette uscente da  $P$ , punto di tangenza, si ottiene:

$$\text{prob}(c > \sqrt{3}r) = 1/3$$

3. Considerando una corda ed il suo punto centrale assieme al cerchio inscritto nel triangolo equilatero, di raggio  $r' = r/2$ . si ottiene:

$$\text{prob}(c > \sqrt{3}r) = \frac{\pi r'^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

È evidente che nessuna di queste probabilità corrisponde alla probabilità cercata, la quale dovrebbe essere unica, in quanto esse si riferiscono a 3 variabili aleatorie diverse e quindi non commisurabili.

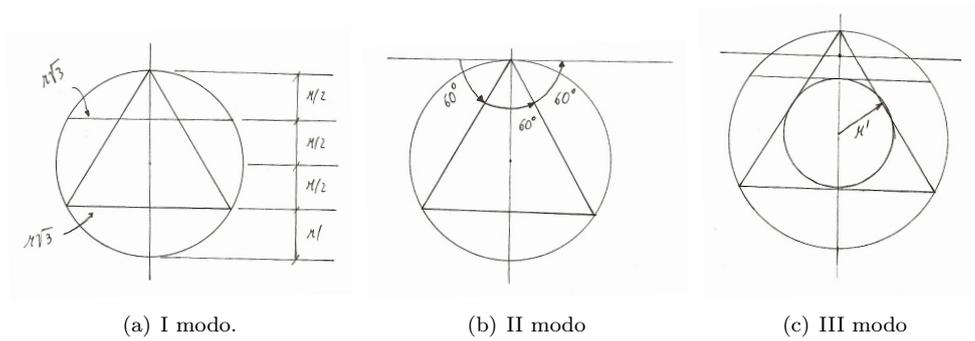


Figura 2.3: Possibili soluzioni del quiz.

### 2.1.4 Curva di durata delle portate

Consideriamo un corso d'acqua e la variabile aleatoria corrispondente alla portata  $Q$  nella sezione  $S_0$  di chiusura del bacino. A questa variabile aleatoria rimane associata una funzione di probabilità cumulata:

$$CDF : F_Q(q) = \text{prob}(Q \leq q)$$

la quale esprime la variabilità della portata nella sezione  $S_0$  in un giorno qualsiasi ad un'ora qualsiasi.

Si definisce *curva di durata delle portate*:

$$F_{1Q}(q) = \text{prob}(Q > q) = 1 - F_Q(q) \quad (2.3)$$

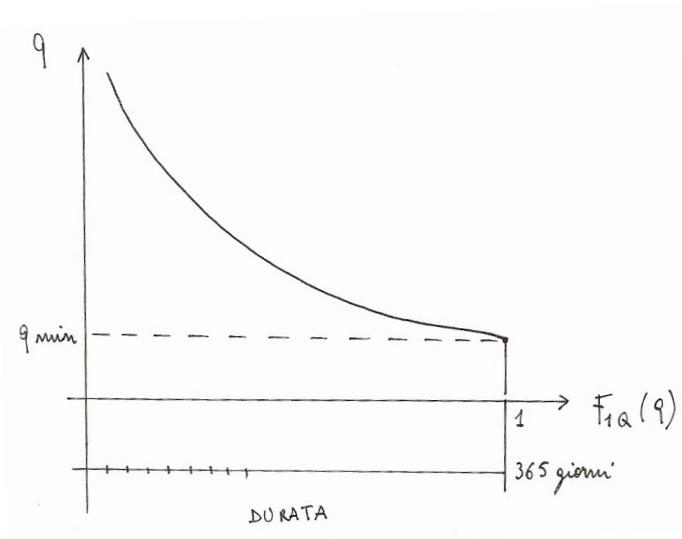


Figura 2.4: Curva di durata delle portate.

Normalmente tale curva viene riportata, per questioni di comodità tecnica, in un piano in cui:

- ascisse:  $F_{1Q}(q)$  trasformata in *durata* %:

- ✓  $1 \Rightarrow 365$  giorni/anno: 365 giorni all'anno la portata è maggiore del valore ad esso associato ( $q_{\min}$ );
- ✓  $0 \Rightarrow 0$  giorni/anno: per nessun giorno all'anno la portata è maggiore del valore ad esso associato.

- ordinate:  $q$ .

La  $q_{\min}$  può anche essere nulla (fiumi che vanno in secca).

### Applicazione alle opere di presa ad acqua fluente

Consideriamo un'opera di presa che capti l'acqua da un corso d'acqua la cui curva di durata delle portate è rappresentata in figura 2.5. Sia  $q^*$  la massima portata prelevabile da tale opera (portata di dimensionamento). Nel caso non vi siano vincoli di alcun tipo l'area  $V$  rappresenta il volume d'acqua prelevato in 1 anno.

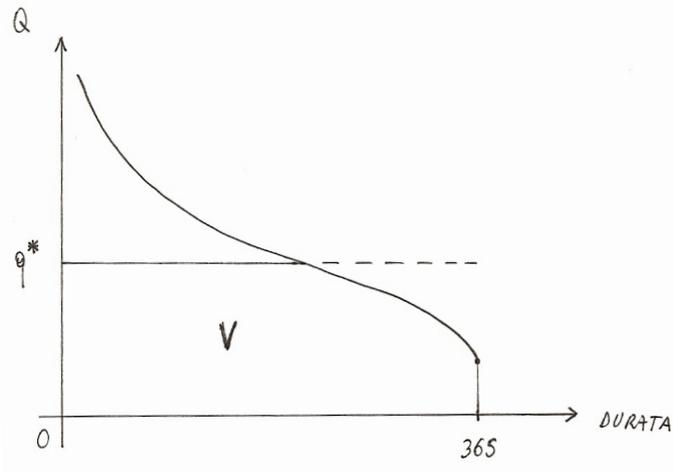


Figura 2.5: Applicazione della curva di durata delle portate alle opere di presa ad acqua fluente.

In realtà esistono dei vincoli che limitano il prelievo delle portate da un corso d'acqua. Essi possono essere di 3 tipi.

1. *Deflusso Minimo Vitale* (DMV). Portata d'acqua minima, stabilita per legge (L. 183/89), che le utenze devono rilasciare al corso d'acqua per garantire la sopravvivenza delle specie biotiche nel tratto compreso tra l'opera di presa e quella di reimmissione. Ne consegue che:
  - in condizioni di magra: si privilegia il DMV e si riduce la portata utilizzata  $q_u$ ;
  - in condizioni di piena: si capta tutta la  $q^*$  e si rilascia una portata maggiore del DMV.

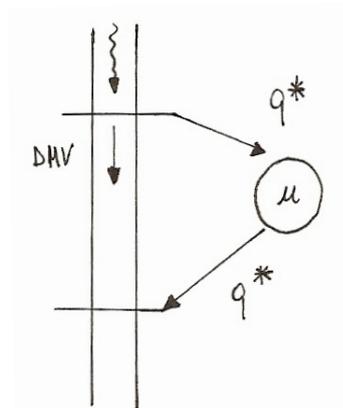


Figura 2.6: Deflusso minimo vitale.

2. *Portata minima accettabile*  $Q_{\min}$ . Capita che per problemi tecnici (esempio: funzionamento delle turbine) la portata prelevata non deve essere inferiore ad un determinato valore.
3. *Portata massima accettabile*  $Q_{\max}$ . Capita che se la portata del fiume è maggiore di un determinato valore non può essere prelevata alcuna portata (esempio: trasporto solido eccessivo negli impianti idroelettrici).

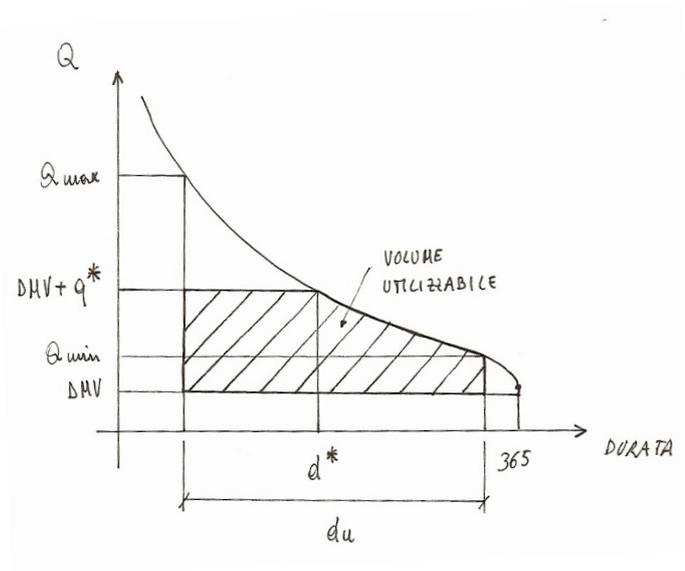


Figura 2.7: Applicazione della curva di durata delle portate alle opere di presa ad acqua fluente con vincoli.

### 2.1.5 Curva di utilizzazione

Data una curva di durata delle portate, senza vincoli, resta definita una *portata media di deflusso*:

$$Q_m = \frac{V_{\text{totale}}}{365 \text{ giorni}} \quad (2.4)$$

Sia:

- $q^*$ : portata di dimensionamento;
- $q_u = V/365$  giorni: portata media di utilizzo.

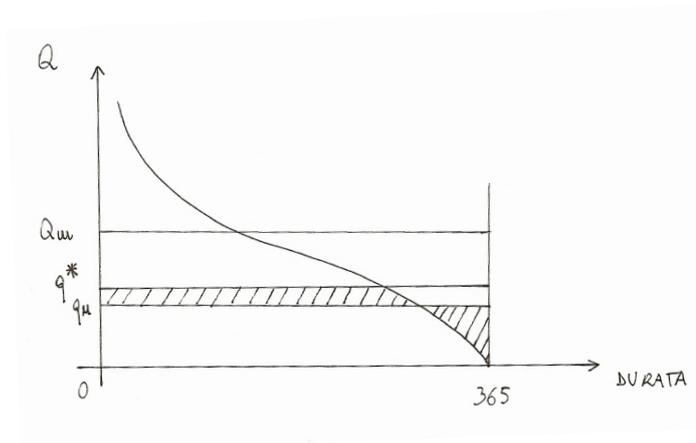


Figura 2.8: Portata di dimensionamento e portata di utilizzo.

Si definisce *rapporto di captazione*:

$$\chi = \frac{q^*}{Q_m} \quad (2.5)$$

Si definisce *rapporto di utilizzo*:

$$\eta = \frac{q_u}{Q_m} \quad (2.6)$$

La *curva di utilizzazione* è la curva che descrive l'andamento del rapporto di utilizzo in funzione di quello di captazione.

- Se  $q^* = 0$  allora  $\chi = 0$  e  $\eta = 0$ : non si prende acqua.
- Se  $q^*$  aumenta allora  $\chi$  aumenta ma  $\eta$  aumenta di meno a causa del minor aumento di  $q_u$ ;
- Se  $q^* \rightarrow +\infty$  allora  $\eta \rightarrow 1$  perchè  $q_u \rightarrow Q_m$ .

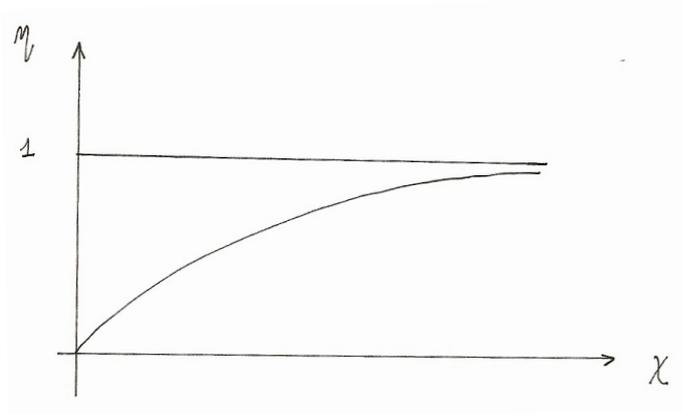


Figura 2.9: Curva di utilizzazione.

Sulla base di queste considerazioni ne consegue che all'aumentare delle dimensioni dell'opera di presa (aumento di  $q^*$  e quindi di  $\chi$ ) non corrisponde un aumento proporzionale del beneficio ottenuto (aumento di  $q_u$  e quindi di  $\eta$ ).

Se si considera una curva di durata delle portate con la presenza di vincoli allora tale effetto (sproporzione tra aumento dei costi e aumento dei benefici conseguenti) è ancora più marcato.

### 2.1.6 Frequenza cumulata empirica

Data la variabile aleatoria  $Q$  si osserva un certo numero di realizzazioni, l'andamento della distribuzione di probabilità può essere desunta, mediante un'operazione statistica, dalle frequenze di accadimento.

Mettendo in ordine le portate dalla più piccola alla più grande, indipendentemente dall'ordine cronologico (tabella 2.1), è possibile costruire un grafico di *frequenza cumulata empirica* (figura 2.10).

Tabella 2.1: Costruzione della frequenza empirica cumulata.

ordine	portata	frequenza cumulata	regola di Weibull
1	$Q_{\min}$	$1/N$	$1/(N+1)$
2	$Q_2$	$2/N$	$2/(N+1)$
...	...	...	...
$i$	$Q_i$	$i/N$	$i/(N+1)$
...	...	...	...
$N$	$Q_{\max}$	1	$N/(N+1)$

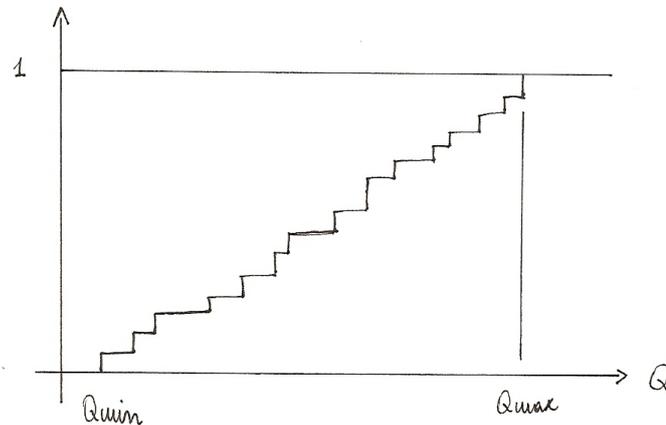


Figura 2.10: Frequenza cumulata empirica.

Assumendo la probabilità come:

$$\text{probabilità} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

allora si ha che:

$$\text{frequenza cumulata} \approx \text{prob}(Q \leq q)$$

Per evitare che a  $Q_N$  corrisponda una probabilità unitaria e a  $Q_0$  una probabilità nulla, si utilizza come espressione della frequenza cumulata una funzione del tipo:

$$F_i = \frac{i - p}{N + q}$$

La più comune è la *frequenza cumulata empirica di Weibull*:

$$F_i = \frac{i}{N + 1} \tag{2.7}$$

Il difetto di questo modo di operare è che si è dipendenti dal campione, per cui al suo variare è possibile che i valori della portata massima e minima cambino.

Si vuole quindi un'approssimazione esprimibile in termini analitici che non sia semplicemente un'interpolazione delle osservazioni, ma qualcosa di più significativo, ossia la vera *distribuzione di probabilità*  $F_Q(q)$  da cui discendono le osservazioni.

### 2.1.7 Modelli di probabilità

I modelli di probabilità servono a trovare  $F_Q(q)$ . Sono dei *modelli concettuali* basati sulla descrizione accurata dell'esperimento considerato, ancora prima che questo venga effettuato.

Nel caso del lancio della moneta il modello concettuale è quello dell'equiprobabilità, in quanto non c'è alcun motivo per preferire una faccia o l'altra.

#### Modello additivo

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  delle variabili aleatorie dotate delle rispettive funzioni di distribuzione di probabilità, sia  $Z$  una variabile aleatoria tale che:

$$Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Ci si chiede se si può dire qualcosa sulla distribuzione di probabilità di  $Z$  sulla base delle distribuzioni di  $X_i$ . A tal proposito sussiste il cosiddetto *teorema del limite centrale*:

se  $n \rightarrow \infty$ , comunque siano distribuite  $X_1, X_2, \dots, X_n$  allora  $Z$  tende ad avere una *distribuzione normale* (o *gaussiana*):

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (2.8)$$

L'ultima relazione scritta rappresenta la cosiddetta *gaussiana standardizzata*, ossia avente media nulla e deviazione standard pari a 1. Per passare da una variabile  $z$ , avente media  $M_z$  e deviazione standard  $S_z$ , a quella standardizzata basta effettuare la sostituzione:

$$x = \frac{z - M_z}{S_z}$$

Nel caso delle portate si ha:

$$f_Q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(q - \bar{q})^2}{\sigma_q^2}\right) \quad (2.9)$$

#### Modello moltiplicativo

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  delle variabili aleatorie dotate delle rispettive funzioni di distribuzione di probabilità, sia  $Z$  una variabile aleatoria tale che:

$$Z = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n$$

Tale modello può essere ricondotto ad un modello additivo mediante i logaritmi delle singole distribuzioni:

$$\log Z = \sum_{i=1}^n \log X_i$$

Una volta ricondotti ad un modello additivo nei logaritmi, per il teorema del limite centrale,  $\log Z$  è distribuita come una normale e quindi  $Z$  ha una *distribuzione log-normale*.

## 2.2 Modelli probabilistici in idrologia

### 2.2.1 Il caso delle portate al colmo di piena

Per dimensionare le opere fluviali interessa la *portata al colmo*  $Q_c$ . All'interno di un evento la portata che interessa a questo scopo è solamente quella massima. A questo proposito per trovare la variabile aleatoria giusta si rendono necessari dei modelli:

- metodo dei picchi sopra la media;
- metodo del massimo in un intervallo di tempo.

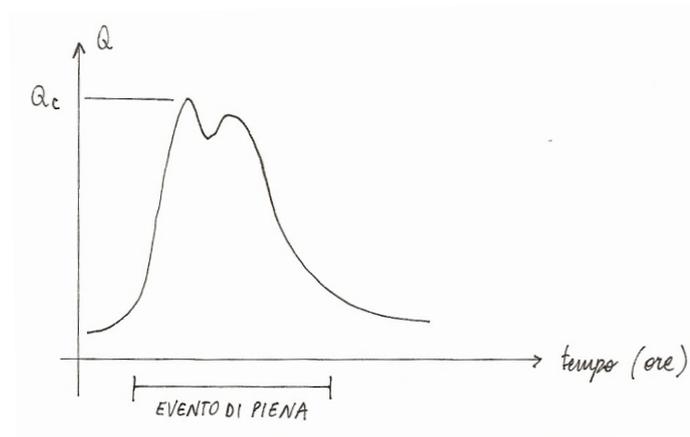


Figura 2.11: Evento di piena.

### 2.2.2 Metodo dei picchi sopra una soglia

Le portate vengono osservate per un intero anno di 365 giorni. Si sceglie un *portata di soglia*  $q_s$  e si separano gli *eventi* come porzioni di grafico che stanno costantemente sopra la portata di soglia. Per ogni evento si prende poi il solo *valore massimo*.

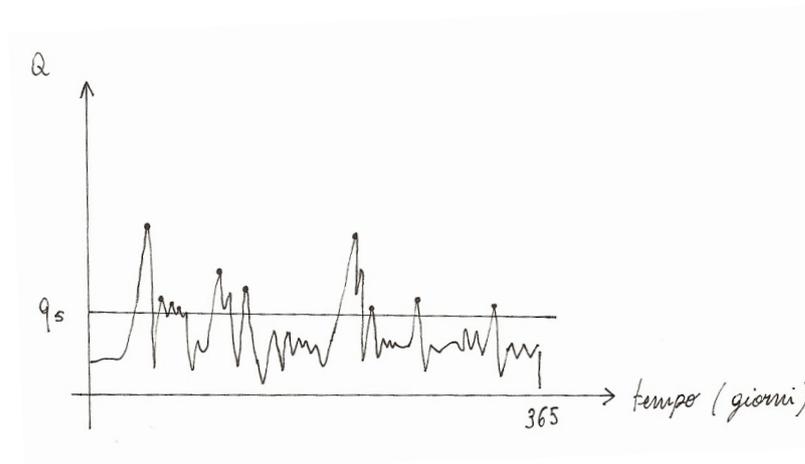


Figura 2.12: Metodo dei picchi sopra una soglia.

In questo modo si ottiene una serie di valori  $N_{ea}$  di piena che oltrepassano la soglia. Di fatto viene effettuato un *campionamento* di eventi aventi una certa significatività.

L'*intervallo medio di attesa* tra due eventi successivi, espresso in giorni, è dato da:

$$\bar{\tau} = \frac{365}{N_{ea}} \quad (2.10)$$

### Distribuzione di Frechet

La *distribuzione delle eccedenze*  $x = Q_c - q_s$  è una *distribuzione esponenziale* o di *Frechet*, con funzione di probabilità cumulata:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (2.11)$$

Tale modello *non è molto utilizzato* in quanto i dati pubblicati non forniscono tutti i picchi sopra una certa soglia. Risulta quindi più facile, a meno che non si abbia accesso ai dati originali, ricorrere al metodo del massimo in un intervallo di tempo.

### 2.2.3 Metodo del massimo in un intervallo di tempo

La serie temporale viene separata ad intervalli  $\Delta t = 1$  anno, in questo modo si riesce ad avere una distribuzione più omogenea delle portate. All'interno di ogni  $\Delta t$  si prende la portata massima:

$$\max_{\Delta t}(Q_c)$$

Si effettua in questo modo un campionamento ogni  $\Delta t$  e con un intervallo medio di attesa  $\bar{\tau} = \Delta t$ .

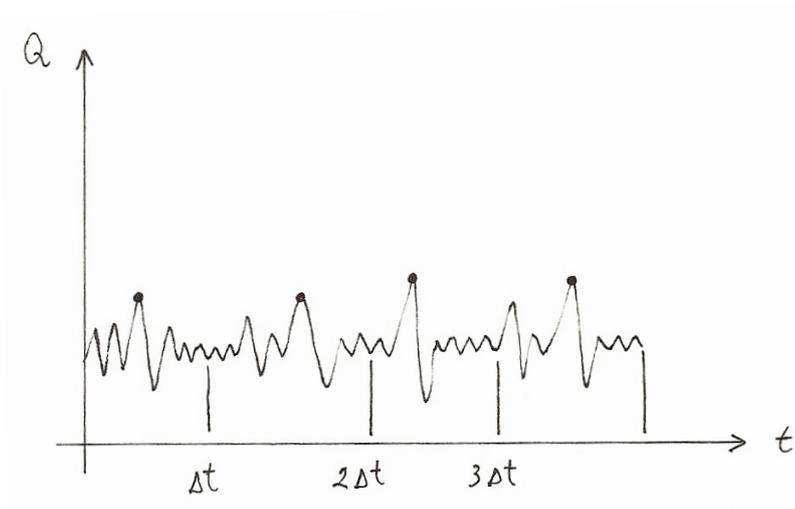


Figura 2.13: Metodo del massimo in un intervallo di tempo.

Tale metodo è più comodo del precedente, tuttavia, a differenza del primo, presenta lo svantaggio statistico che servono almeno 20-30 valori (e quindi osservazioni per 20-30 anni) per effettuare un'indagine statistica significativa.

### Modello del valore estremo: distribuzione di Gumbel

Il metodo del massimo in un intervallo di tempo conduce al *modello probabilistico del valore estremo*:

$X$ : è distribuita in maniera qualsiasi ed è osservabile nel tempo;

$Y = \max_{\Delta t}(X)$ : è detto *estremo*.

Ci si chiede cosa si può dire a priori sulla distribuzione di  $Y$  quale che sia la distribuzione di  $X$ . Tale problema è stato studiato da *Gumbel*: se gli estremi sono molto alti (all'amplificarsi dei  $\Delta t$ ) allora:

$F_Y(y) \rightarrow 3$  tipi di distribuzione : distribuzioni del valore estremo

La più nota è la *distribuzione del valore estremo del 1° tipo* (EV1 - Extreme Value 1<sup>st</sup> type) o *distribuzione di Gumbel*, la quale ha una *funzione di probabilità cumulata* (standardizzata) nota anche come *doppia esponenziale*:

$$F_Y(y) = \exp(-\exp(-y)) \quad (2.12)$$

Derivando la doppia esponenziale si ottiene la *funzione di densità di probabilità* (standardizzata):

$$f_Y(y) = \exp[-\exp(-y)] \cdot \exp(-y) \quad (2.13)$$

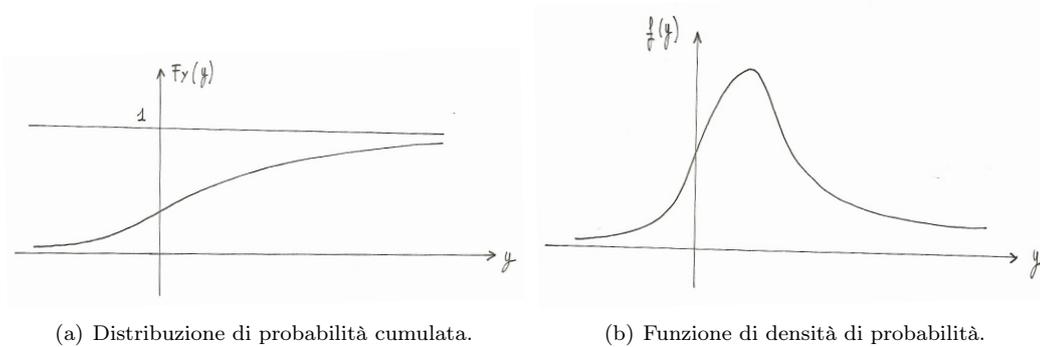


Figura 2.14: Distribuzione di Gumbel.

La doppia esponenziale gode delle *proprietà* delle distribuzioni di probabilità:

- $F_Y(y) > 0 \quad \forall y$
- $y \rightarrow -\infty : \exp(-y) \rightarrow +\infty \implies \exp(-\exp(-y)) \rightarrow 0$
- $y \rightarrow +\infty : \exp(-y) \rightarrow 0 \implies \exp(-\exp(-y)) \rightarrow 1$

È possibile istituire un rapporto tra la variabile standardizzata  $y$  e la variabile non standardizzata  $Q_{ca}$ , mediante dei *parametri di adattamento*  $\alpha$  e  $\beta$  (portate):

$$y = \frac{Q_{ca} - \beta}{\alpha} \quad (2.14)$$

ottenendo quindi:

$$F_{Q_{ca}}(q) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{q - \beta}{\alpha}\right)\right) \quad (2.15)$$

$$f_{Q_{ca}}(q) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{q - \beta}{\alpha}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{q - \beta}{\alpha}\right)\right] \quad (2.16)$$

In questo modo è possibile *adattare* una distribuzione standard teorica ai modelli reali.

### Stima grafica dei parametri di adattamento

Le trasformazioni di variabili si prestano bene ad essere impiegate per cercare la distribuzione reale in maniera empirica: data una sequenza di portate ordinate si cerca di fittare la rappresentazione a scalini della frequenza cumulata empirica facendo variare i parametri di adattamento della distribuzione di Gumbel.

Si osserva innanzitutto che la trasformazione tra  $Q_{ca}$  e  $y$  è lineare:

$$Q_{ca} = \beta + \alpha y$$

Inoltre:

$$F_Y(y) = \exp(-\exp(-y)) = \text{prob}(Y \leq y)$$

$$F_Q(q_i) \approx \frac{i}{N+1}$$

Ma vale:

$$F_Q(q_i) = F_Y(y)$$

in quanto:

$$\text{se } y^* \rightarrow \text{prob}(Y \leq y^*) \text{ allora } q^* = \beta + \alpha y^* \rightarrow \text{prob}(Q \leq q^*) \text{ e } \text{prob}(Y \leq y^*) = \text{prob}(Q \leq q^*)$$

Quindi:

$$F_Y(y) \approx \frac{i}{N+1} = \exp(-\exp(-y))$$

da cui si ottiene:

$$y = -\ln \left[ \ln \left( \frac{N+1}{i} \right) \right] \quad (2.17)$$

Date quindi delle coppie  $(Q_i, y_i)$  esse vengono plottate su un piano  $Q, y$  e poi interpolate linearmente al fine di trovare  $\alpha$  e  $\beta$ .

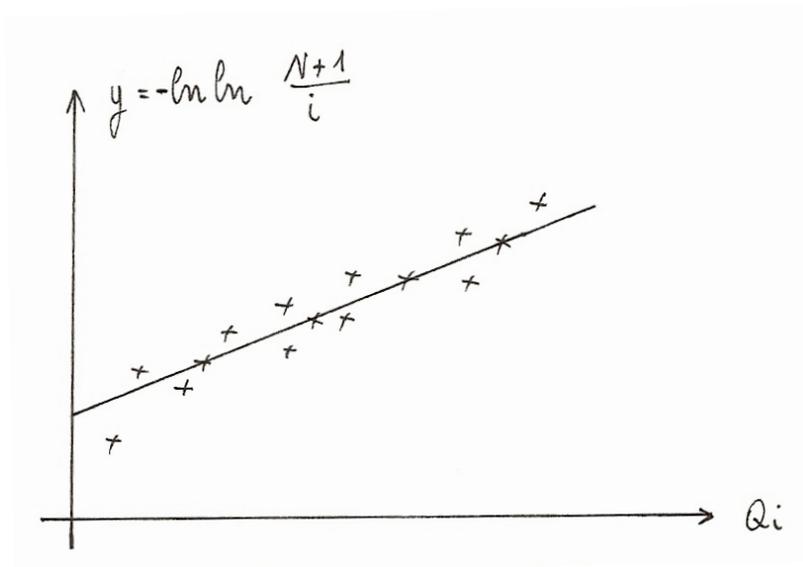


Figura 2.15: Determinazione grafica dei parametri di adattamento per la distribuzione di Gumbel.

### 2.2.4 Tempo di ritorno

Ci si chiede qual'è l'intervallo medio di attesa tra 2 eventi di superamento di un certo valore  $q^*$  o, equivalentemente, quante volte bisogna tentare l'esperimento (ossia quanti anni bisogna aspettare) per superare un certo valore  $q^*$ .

La risposta è data dal *tempo di ritorno*:

$$T_R = \frac{\bar{\tau}}{1 - F_Q(q^*)} \quad (2.18)$$

Poiché di norma  $\bar{\tau} = 1$  anno si ha:

$$T_R = \frac{1}{1 - F_Q(q^*)} \quad (2.19)$$

È facile vedere che il tempo di ritorno altro non è che una *parametrizzazione della probabilità*:

$$F_Q(q_{T_R}) = 1 - \frac{1}{T_R} = \frac{T_R - 1}{T_R} \quad (2.20)$$

Se  $T_R = 100$  anni si ha una probabilità di non superamento del 99%, ossia nel 99% dei casi in cui si considera l'evento di piena non si ha il superamento di quel valore.

È evidente che con il tempo di ritorno si misura il *rischio accettabile*: maggiore è il tempo di ritorno fissato per determinato evento, maggiore è la portata al colmo corrispondente e maggiore è il rischio idrologico associato. Esso viene stabilito dalla normativa ed è fissato in funzione del tipo di opera che si va a realizzare:

- fognature: 5 anni;
- argini dei fiumi: si progettano per piene con  $T_R = 100$  anni (+1 metro);
- sfioratori delle dighe: 1000 anni.

## 2.3 Stima numerica dei parametri statistici di adattamento

La struttura intrinseca di probabilità non è nota, però è possibile partendo da una serie di realizzazione della variabile aleatoria cercare di approssimare al meglio la vera distribuzione di probabilità. In pratica si effettua un adattamento della  $\hat{F}_X(x)$  ad un campione ossia una stima approssimata della vera distribuzione  $F_X(x)$ . Ciò avviene in due fasi:

1. ricerca di una famiglia di distribuzioni da attribuire alle osservazioni (vedi paragrafo 2.2);
2. stima numerica dei parametri statistici di adattamento del tipo di distribuzione scelta.

### 2.3.1 Richiami di statistica

#### Momenti statistici

Data una funzione di densità di probabilità  $f_X(x)$ :  
si definisce *momento del I ordine* o *media*:

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \quad (2.21)$$

si definisce *momento di ordine n*:

$$m_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x) dx \quad (2.22)$$

si definisce *momento centrale di ordine n*:

$$S_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^n f_X(x) dx \quad (2.23)$$

Il momento centrale del II ordine è detto *varianza*:

$$S_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx \quad (2.24)$$

#### Stima dei momenti statistici (momenti statistici campionari)

Nel caso in cui il modello probabilistico sia di tipo equiprobabile si ha che:  
la *media campionaria* vale:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (2.25)$$

la *varianza campionaria non distorta* (unbiased) vale:

$$S_X^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.26)$$

### 2.3.2 Metodo dei momenti

Il metodo dei momenti fu per la prima volta proposto da Pearson nel 1894. Il concetto su cui si basa è molto semplice. Si consideri la PDF  $f_X(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$  per la quale i parametri  $\theta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  devono essere stimati sulla base del campione  $X_1, X_2, \dots, X_n$  di  $X$ . I *momenti teorici* della variabile aleatoria  $X$  valgono:

$$m_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m) dx \quad i = 1, 2, \dots$$

Essi sono in generale funzione dei parametri sconosciuti:

$$m_i = m_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$$

È possibile inoltre determinare i *momenti campionari* dei vari ordini sulla base del campione di  $X$ :

$$M_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j^i \quad i = 1, 2, \dots$$

Il metodo dei momenti afferma che al fine di determinare una stima dei parametri  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  basta *eguagliare* un numero sufficiente di momenti campionari ai corrispondenti momenti teorici. Risolvendo un numero di equazioni pari al numero dei parametri da stimare si ottengono i valori stimati dei parametri.

#### Applicazione alla distribuzione di Gumbel

Consideriamo il caso della *distribuzione di Gumbel*:

$$F_X(x) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right]$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha} \exp \left( - \frac{x - \beta}{\alpha} \right) \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \beta}{\alpha} \right) \right]$$

Dalla distribuzione teorica si ha che:

$$\text{media} = \text{media}(\alpha, \beta)$$

$$\text{varianza} = \text{varianza}(\alpha, \beta)$$

Dalle osservazioni sperimentali si ha che:

$$\bar{x} = \text{numero}$$

$$S^2 = \text{numero}$$

Avendo in questo caso 2 parametri da determinare si ottiene un sistema di 2 equazioni in 2 incognite  $(\alpha, \beta)$ :

$$m_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \beta + \gamma \alpha = \bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}$$

$$S_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx = \frac{\pi^2}{6} \alpha^2 = S_X^2$$

La costante  $\gamma$  è detta *costante di Eulero-Mascheroni* e vale 0,5772... Riarrangiandole si ottiene:

$$\alpha = \frac{S_X}{\pi} \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.27)$$

$$\beta = \bar{x} - \gamma \alpha \quad (2.28)$$

### 2.3.3 Metodo di Gumbel

Questo metodo può essere applicato *solo* alla distribuzione di Gumbel. Stimando graficamente la frequenza empirica cumulata di non superamento mediante la regola di Weibull:

$$F_i = \frac{i}{N+1}$$

si ottiene, come già visto in precedenza, una variabile standardizzata:

$$y_i = -\ln \ln \frac{N+1}{i}$$

In un campione di dimensione  $[N]$  si possono calcolare la media e lo scarto quadratico medio campionari di  $y$ :

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}$$

Osservando che:

$$y = \frac{x - \beta}{\alpha} \implies x = \beta + \alpha y$$

si suppone che esista una relazione del tipo:

$$\frac{x - \bar{x}}{S_X} = \frac{y - \bar{y}}{S_Y}$$

risolvendo in  $x$  si ottiene:

$$x = \bar{x} + \frac{S_X}{S_Y} (y - \bar{y}) = \left( \bar{x} - \frac{S_X}{S_Y} \bar{y} \right) + \frac{S_X}{S_Y} y$$

da cui si possono riconoscere le espressioni delle stime dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\alpha = \frac{S_X}{S_Y} \tag{2.29}$$

$$\beta = \bar{x} - \frac{S_X}{S_Y} \bar{y} \tag{2.30}$$

Si può dimostrare che se  $N \rightarrow +\infty$  allora il metodo dei momenti applicato alla distribuzione di Gumbel ed il metodo di Gumbel coincidono.

### 2.3.4 Metodo dei minimi quadrati lineari

Il metodo dei minimi quadrati lineari è semplicemente un affinamento numerico del metodo grafico visto per la determinazione dei parametri di adattamento della distribuzione di Gumbel, esso è quindi privo della giustificazione teorica del metodo dei momenti. Esso è inoltre estremamente sensibile al valore assunto dagli estremi.

Dal punto di vista operativo si plottano su di un piano i punti  $(x_i, y_i)$  con  $i = 1, \dots, N$  corrispondenti alle coppie osservazioni – variabili standard della distribuzione. Si effettua poi un'interpolazione lineare ai minimi quadrati risolvendo il sistema lineare sovradimensionato:

$$\sum_{i=1}^N (x_i - y_i(\alpha, \beta))^2 = \min \quad (2.31)$$

Si noti come essendo i valori  $x_i$  noti e i valori  $y_i$  stimati si debba porre in ascissa i primi ed in ordinata i secondi, altrimenti si ottengono dei risultati leggermente diversi.

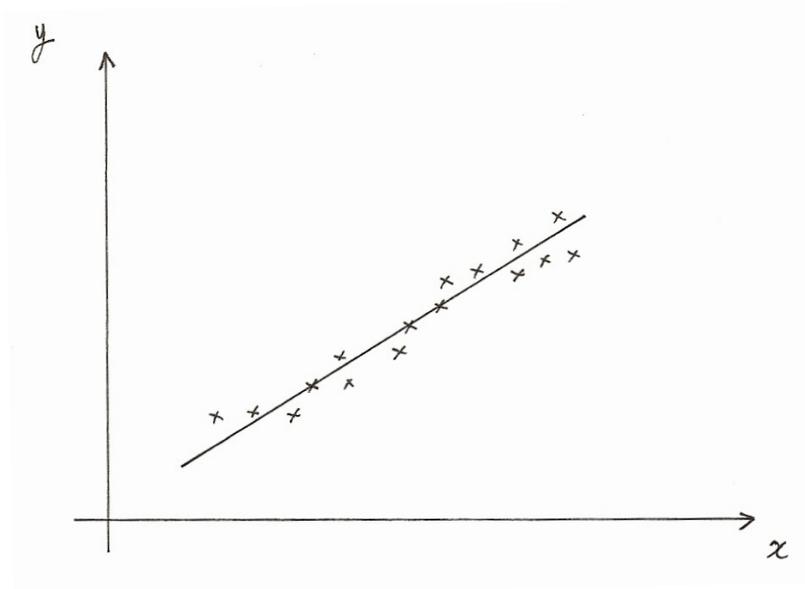


Figura 2.16: Metodo dei minimi quadrati lineari.

### 2.3.5 Metodo della massima verosimiglianza

Il metodo della massima verosimiglianza fu per la prima volta introdotto da Fisher nel 1922.

Sia  $f_X(x; \alpha, \beta)$  una PDF della variabile aleatoria  $X$  e siano  $\alpha$  e  $\beta$ , per semplicità, gli unici due parametri che devono essere stimati dai valori campionari  $x_1, x_2, \dots, x_N$ .

Si definisce *funzione di verosimiglianza* (likelihood function) di una serie di  $n$  valori campionari:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_N; \alpha, \beta) = \prod_{i=1}^N f_X(x_i; \alpha, \beta) \tag{2.32}$$

Quando i valori campionari sono dati la funzione di verosimiglianza diventa, in questo caso, una funzione delle 2 variabili  $\alpha$  e  $\beta$ . La procedura di stima di  $\alpha$  e  $\beta$  basata sul metodo di massima verosimiglianza consiste nel scegliere come stima di  $\alpha$  e  $\beta$  quei particolari valori che massimizzano la funzione di verosimiglianza.

È possibile dare una giustificazione intuitiva della definizione di  $\mathcal{L}$ : con riferimento alla figura 2.17 se i valori di  $\alpha$  (parametro di scala) e  $\beta$  (parametro di posizione) non sono corretti il valore assunto da  $\mathcal{L}$  diminuisce, ne consegue che devono esistere dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$  che massimizzano la funzione di verosimiglianza.

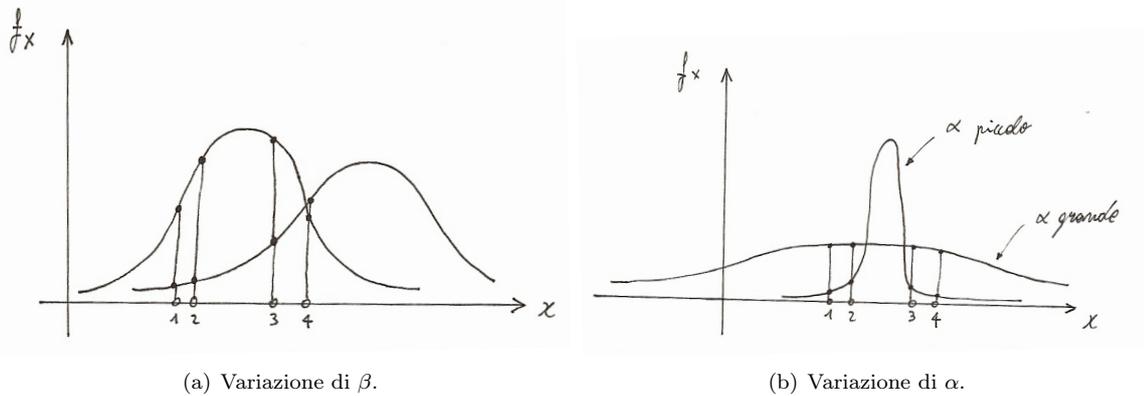


Figura 2.17: Costruzione della funzione di verosimiglianza.

La *stima di massima verosimiglianza* (MLE - Maximum Likelihood Estimate) dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$ , basata sui valori campionari  $x_1, \dots, x_N$ , può essere ottenuta come soluzione di un problema di ricerca di massimo di una funzione di 2 variabili e quindi ottenibile come soluzione delle equazioni:

$$\begin{cases} \partial \mathcal{L} / \partial \alpha = 0 \\ \partial \mathcal{L} / \partial \beta = 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

Dal momento che  $\mathcal{L}$  è sempre non negativa e raggiunge il suo massimo per i medesimi valori di  $\alpha$  e  $\beta$  di  $\log \mathcal{L}$  (in quanto il log è una funzione monotona crescente), è in generale più conveniente ottenere la MLE effettuando la *trasformata logaritmica* di  $\mathcal{L}$ :

$$\log \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \log f_X(x_i; \alpha, \beta) \tag{2.34}$$

e risolvendo le cosiddette *equazioni di verosimiglianza*:

$$\begin{cases} \partial \log \mathcal{L} / \partial \alpha = 0 \\ \partial \log \mathcal{L} / \partial \beta = 0 \end{cases} \tag{2.35}$$

### Applicazione alla distribuzione di Gumbel

Se  $f_X(x)$  è una funzione di Gumbel:

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{x-\beta}{\alpha}\right) \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\beta}{\alpha}\right)\right] \quad (2.36)$$

applicando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$\ln \mathcal{L} = -N \ln \alpha - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N (x_i - \beta) - \sum_{i=1}^N e^{-\frac{x_i - \beta}{\alpha}} \quad (2.37)$$

Imponendo le condizioni di ricerca del massimo si ottiene un sistema non lineare di 2 equazioni in 2 incognite  $(\alpha, \beta)$ .

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -\frac{N}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \beta) - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \beta) e^{-\frac{x_i - \beta}{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \beta} = \frac{N}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^N e^{-\frac{x_i - \beta}{\alpha}} = 0$$

Dopo alcuni “semplici” passaggi algebrici si ottiene un’equazione non lineare in  $\alpha$ :

$$\sum_{i=1}^N x_i e^{-x_i/\alpha} - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \alpha\right) \sum_{i=1}^N e^{-x_i/\alpha} = 0 \quad (2.38)$$

La quale può essere risolta, ad esempio, con il metodo di sostituzione, dopo averla scritta nella forma:

$$\alpha = \frac{\bar{x} \sum_{i=1}^N e^{-x_i/\alpha} - \sum_{i=1}^N x_i e^{-x_i/\alpha}}{\sum_{i=1}^N e^{-x_i/\alpha}} = \bar{x} - \frac{\sum_{i=1}^N x_i e^{-x_i/\alpha}}{\sum_{i=1}^N e^{-x_i/\alpha}}$$

Una volta trovato il parametro  $\alpha$  si può calcolare  $\beta$  mediante la relazione:

$$\beta = \alpha \ln \left[ \frac{N}{\sum_{i=1}^N e^{-x_i/\alpha}} \right] \quad (2.39)$$

## 2.4 Applicazioni all'intensità di pioggia

La serie temporale delle precipitazioni è molto più oscillante e "casuale" di quella delle portate in un corso d'acqua. L'interesse è in ogni caso rivolto ad eventi che abbiano una *durata minima* dei quali interessa sapere:

- la durata;
- il volume d'acqua scaricato.

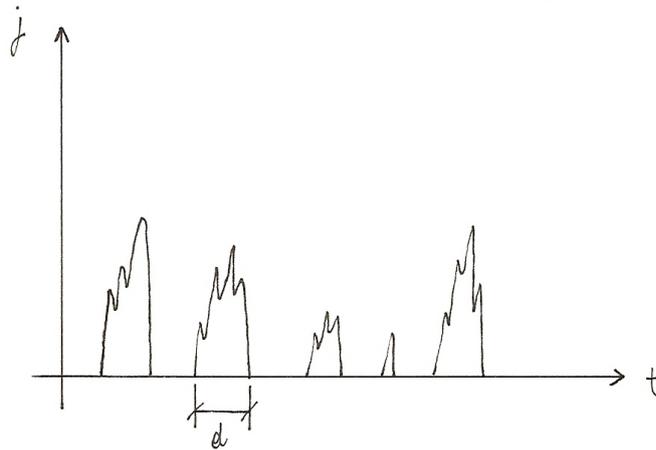


Figura 2.18: Serie temporale dell'intensità di pioggia.

Le *variabili intercorrelate* con cui ci si confronta sono:

1. l'intensità di pioggia  $j$  [L/T] (mm/h);
2. l'altezza di pioggia  $h$  [L] (mm);
3. la *durata*  $d$  [T] (h).

I dati su cui ci si appoggia sono quelli del *Servizio Idrologico Nazionale*, il quale fornisce<sup>1</sup> le *massime altezze di pioggia annue per assegnate durate* di 1, 3, 6, 12, 24 ore.

La distribuzione delle piogge viene indagata per mezzo del *metodo dei massimi annuali*, che conduce al modello probabilistico del *valore estremo* e quindi alla *distribuzione probabilistica di Gumbel*. Poiché le variabili aleatorie sono 5 si hanno 5 diverse distribuzioni di Gumbel, una per ogni durata.

Tabella 2.2: Distribuzioni di probabilità per le diverse variabili aleatorie.

durata	variabile aleatoria	$F_H(h)$
1	$H_1$	$F_{H_1}(h)$
3	$H_3$	$F_{H_3}(h)$
6	$H_6$	$F_{H_6}(h)$
12	$H_{12}$	$F_{H_{12}}(h)$
24	$H_{24}$	$F_{H_{24}}(h)$

Una volta trovati i parametri di adattamento  $\alpha$  e  $\beta$  per le singole distribuzioni, è possibile, fissata la durata dell'evento, conoscere la probabilità corrispondente al superamento del massimo annuo.

<sup>1</sup>Gli Annali Idrologici fornivano anche i valori delle massime altezze di pioggia giornaliere per 1, 2, 3, 4, 5 giorni consecutivi. Tali dati, a differenza delle massime altezze di pioggia annue per durate assegnate, che vengono ottenute mediante pluviografi, venivano ottenuti mediante pluviometri manuali e quindi si riferivano solamente ai valori massimi registrati alle 9 di mattina ed indipendentemente dalla durata dell'evento.

### 2.4.1 Linea segnalatrice di possibilità pluviometrica

Tracciando in funzione della variabile standardizzata di Gumbel  $y = -\ln \ln 1/F$  i valori dell'altezza di pioggia, corrispondenti alle 5 durate, si ottengono 5 rette, una per ogni variabile aleatoria.

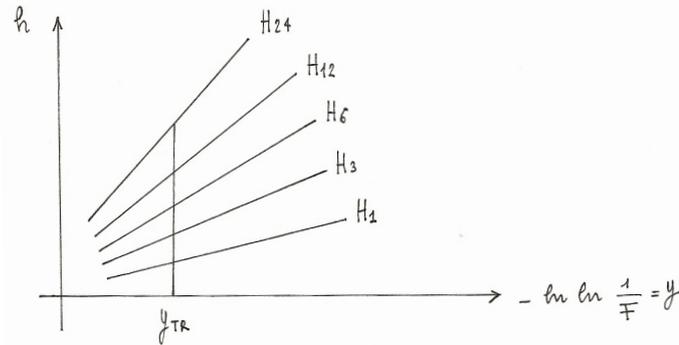


Figura 2.19: Andamento dell'altezza di pioggia in funzione della variabile regolarizzata di Gumbel per 5 diverse variabili aleatorie  $H_i$ , corrispondenti alle massime altezze di pioggia annue per durate di 1, 3, 6, 12, 24 ore.

Tale grafico può essere letto in due maniere distinte:

1. fissata un'altezza di pioggia  $h$  si ottiene la probabilità di non superamento per ogni singola durata: questa aumenta al diminuire della durata;
2. fissata una probabilità di non superamento (ad esempio attraverso un tempo di ritorno) si ottiene per ogni singola durata l'altezza di pioggia: questa aumenta all'aumentare della durata.

Dal momento che lo scopo è quello di ottenere l'altezza di pioggia in funzione del tempo di ritorno anche per *eventi di durata diversa* da quella per cui vengono forniti i dati allora si è di fronte ad un problema di *interpolazione*.

La *curva segnalatrice della possibilità pluviometrica* (LPP - Linea di Possibilità Pluviometrica) è una forma analitica semplice che, per un assegnato *tempo di ritorno* (ossia una determinata frequenza), lega l'altezza di pioggia alla *durata* dell'evento.

Assegnato un  $T_R$  e quindi una frequenza:

$$F = 1 - \frac{1}{T_R} = \frac{T_R - 1}{T_R}$$

si calcola:

$$y_{T_R} = -\ln \ln \frac{T_R}{T_R - 1}$$

si entra nel grafico precedente e per ciascuna durata  $d$  si ottiene  $h$ . Si riportano i 5 punti nel piano  $d, h$  e si effettua l'interpolazione mediante una relazione di potenza del tipo:

$$h = ad^n \tag{2.40}$$

oppure nella forma classica:

$$h = at^n \tag{2.41}$$

Si noti come una LPP sia valida soltanto per un determinato tempo di ritorno.

#### Stima grafica dei parametri $a$ e $n$

Sul piano bilogaritmico la relazione  $h = at^n$  diventa bilineare:

$$\log h = \log a + n \log t \tag{2.42}$$

I valori di  $a$  ed  $n$  si ottengono quindi interpolando con una retta i 5 punti corrispondenti alle 5 durate.

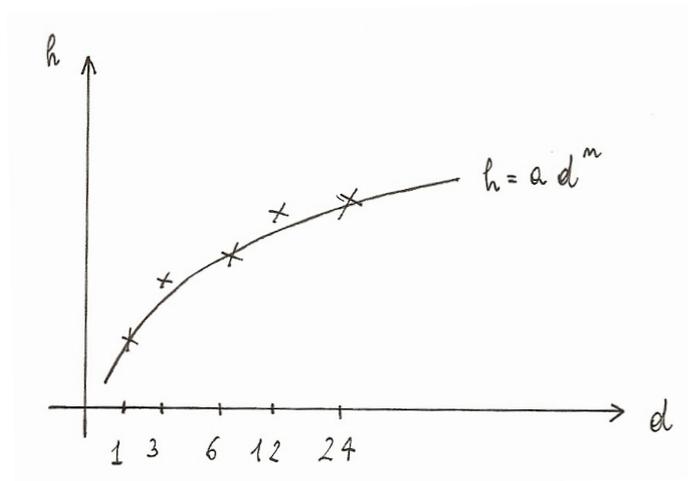


Figura 2.20: Linea segnalatrice di possibilità pluviometrica.

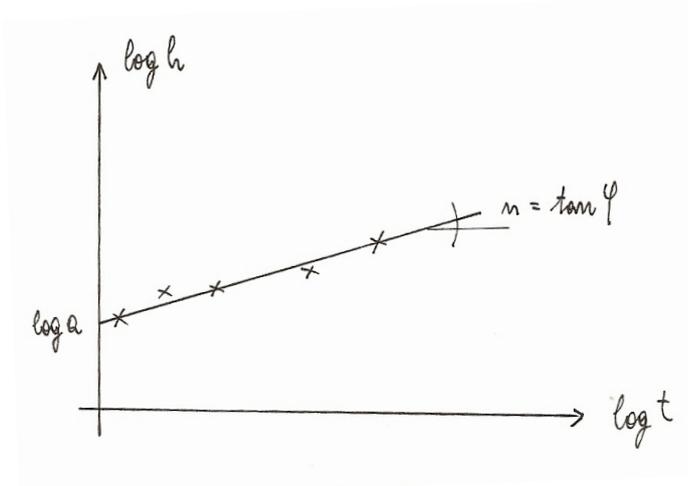


Figura 2.21: Stima grafica dei parametri  $a$  ed  $n$ .

**Relazione tra l'intensità media di pioggia e la durata**

Una volta ottenuta la LPP è possibile costruire una relazione tra l'intensità media di pioggia e la durata:

$$\bar{j} = \frac{h}{t} = at^{n-1} \tag{2.43}$$

Si osservi come:

- a parità di tempo di ritorno, all'aumentare della durata l'altezza di pioggia aumenta quindi:

$$n > 0$$

- l'intensità media di pioggia nei massimi annuali deve essere maggiore di quella calcolata su tempi maggiori (a meno che non si sia nel caso particolare di intensità di pioggia costante), quindi all'aumentare della durata l'intensità media di pioggia diminuisce:

$$n < 1$$

## 2.5 Applicazioni alle portate al colmo di piena

Si vuole applicare la *LPP* alla determinazione delle portate di piena in sezioni di un corso d'acqua in cui *non si hanno misure di portata*. Ciò può essere eseguito con la seguente serie di passi:

1. si sceglie un tempo di ritorno  $T_R$  e si calcolano i parametri  $a$  ed  $n$  della *LPP* (vedi paragrafo 2.4.1);
2. si sceglie l'altezza  $h$  e la durata  $t^*$  di una pioggia tipo che ottemperi alla *LPP*;
3. si sceglie un modello di trasformazione afflussi–deflussi, tale scelta consiste a sua volta in una doppia scelta:
  - (a) scelta del modello con cui valutare il ruscellamento:
    - i. modello di Horton:  $f_0, f_\infty, k$ ;
    - ii. schema ad area contribuyente:  $\phi$ ;
  - (b) scelta dello IUH:
    - i. modello della corrivazione lineare:  $T_c$ ;
    - ii. modello dell'invaso lineare:  $k$ ;
    - iii. modello di Nash:  $n, k$ ;
4. si applica il modello afflussi–deflussi alla pioggia scelta ottenendo una *portata uscente*;
5. si calcola il massimo della portata uscente ricavando la *portata al colmo di piena*;
6. si calcola il massimo della portata al colmo al variare della durata della pioggia ricavando la *portata critica*.

### 2.5.1 Pioggia di progetto ad intensità costante

La pioggia tipo più utilizzata per problemi di progetto è quella ad intensità costante. In tal caso la determinazione della portata di ruscellamento può essere fatta in maniera equivalente con entrambi i metodi visti:

$$j_{eff} = j_{tot} - f = j_{tot} \left( 1 - \frac{f}{j_{tot}} \right) = j_{tot} \cdot \phi$$

Nel seguito verrà utilizzato lo *schema ad area contribuyente*.

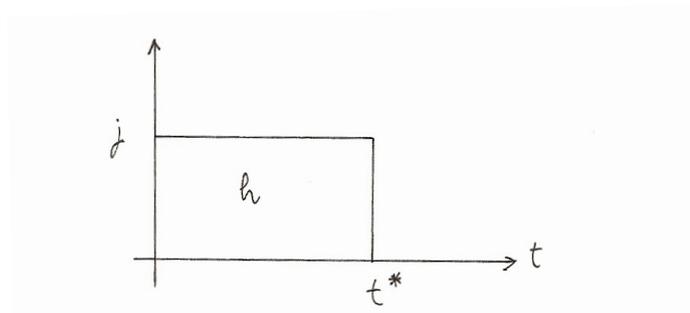


Figura 2.22: Pioggia ad intensità costante.

### 2.5.2 Calcolo della portata

La portata uscente dipende sia dalla  $j_{eff}$  che dalla durata  $t^*$ . Assegnato uno  $IUH = u(t)$  essa si ottiene risolvendo l'integrale di convoluzione:

$$Q(t) = \frac{A_b}{3,6} \int_0^t j_{eff}(\tau)u(t - \tau) d\tau = \frac{A_b \cdot j_{tot}\phi}{3,6} \int_0^t u(t - \tau) d\tau$$

Cambiando la variabile integranda si ottiene:

$$Q(t) = \frac{A_b j_{tot}\phi}{3,6} \int_{\max(0, t-t^*)}^t u(\tau) d\tau \tag{2.44}$$

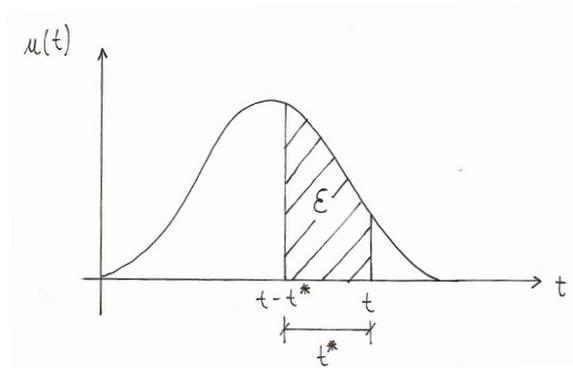


Figura 2.23: Generico idrogramma istantaneo unitario.

#### Portata al colmo di piena

Il massimo della portata si ottiene quando l'area dello IUH calcolata tra  $(t - t^*)$  e  $t$  è massima:

$$Q_c = \max_t Q(t) = \frac{A_b j_{tot}\phi}{3,6} \cdot \max_t \left[ \int_{\max(0, t-t^*)}^t u(\tau) d\tau \right] = \frac{A_b j_{tot}\phi}{3,6} \cdot \max_t \varepsilon = \frac{A_b j_{tot}\phi}{3,6} \cdot \varepsilon' \tag{2.45}$$

Il massimo di quell'integrale in cui solo gli estremi dipendono da  $t$  si ottiene, applicando la *regola di Lagrange*:

$$t' : u(t') = u(t' - t^*) \implies \varepsilon' = \int_{\max(0, t'-t^*)}^{t'} u(\tau) d\tau \tag{2.46}$$

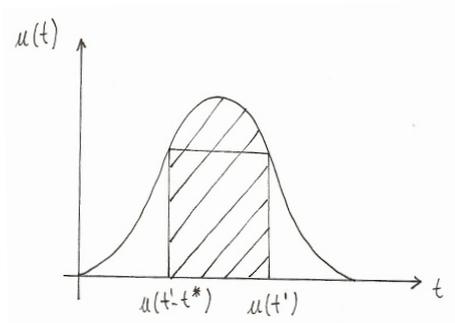


Figura 2.24: Applicazione della regola di Lagrange allo IUH.

### Portata critica

Si definisce *portata critica* la massima portata al colmo di piena che si ha al variare della durata della pioggia:

$$Q_{crit} = \max_{t^*} Q_c = \max_{t^*} \left[ \max_t Q(t) \right] \quad (2.47)$$

In maniera del tutto *convenzionale* si attribuisce alla portata critica  $Q_{crit}$  lo stesso *tempo di ritorno* della pioggia che l'ha generata.

### 2.5.3 Modello della corrivazione lineare

#### Portata al colmo di piena

Definendo lo IUH con il metodo della corrivazione lineare si possono presentare due casi.

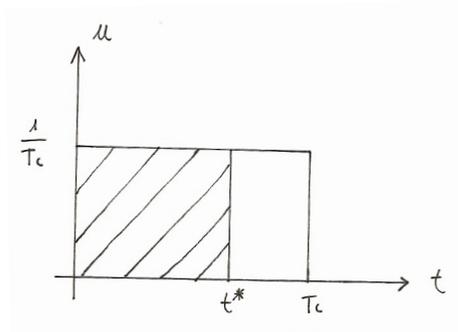


Figura 2.25: IUH definito mediante il metodo della corrivazione lineare.

1.  $t^* < T_c \longrightarrow t' = t^*$ :

$$\varepsilon' = \frac{t^*}{T_c}$$

La portata al colmo di piena vale :

$$Q_c = \frac{A_b \cdot \phi \cdot a \cdot t^{*n-1}}{3,6} \frac{t^*}{T_c} = \frac{A_b \cdot \phi \cdot a \cdot t^{*n}}{3,6 \cdot T_c} \quad (2.48)$$

Poiché  $n > 0$  allora la portata al colmo di piena aumenta all'aumentare della durata della pioggia.

2.  $t^* > T_c \longrightarrow t' = T_c$ :

$$\varepsilon' = 1$$

La portata al colmo di piena vale:

$$Q_c = \frac{A_b \cdot \phi \cdot a \cdot t^{*n-1}}{3,6} \quad (2.49)$$

Poiché  $(n - 1) < 1$  allora la portata al colmo di piena diminuisce all'aumentare della durata della pioggia.

### Portata critica

Se  $t^* < T_c$  allora la portata al colmo aumenta all'aumentare della durata, se  $t^* > T_c$  la portata al colmo diminuisce all'aumentare della durata, ne consegue che il massimo si ha per una durata  $t^* = T_c$ :

$$Q_{crit} = \max_{t^*} Q_c = Q_c(t^* = T_c) = \frac{A_b \cdot \phi \cdot a \cdot T_c^{n-1}}{3,6} \quad (2.50)$$

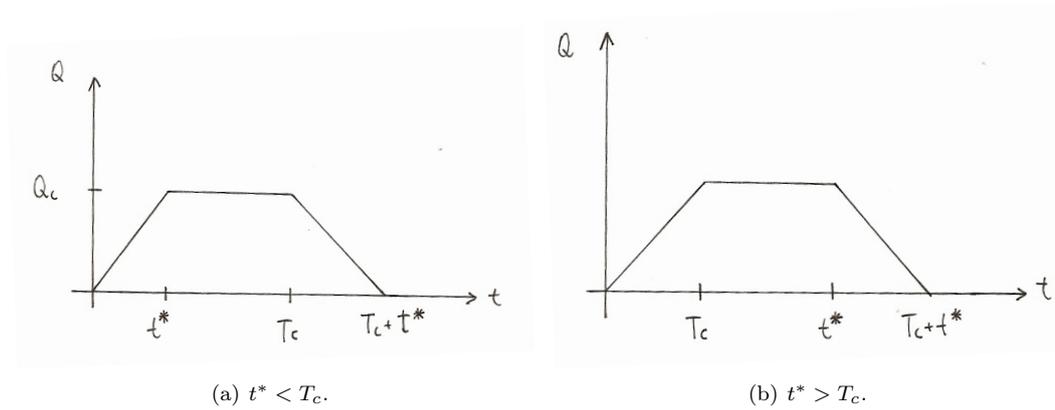


Figura 2.26: Valutazione della portata al colmo di piena.

### 2.5.4 Modello dell'invaso lineare

#### Portata al colmo di piena

Definendo lo IUH col metodo dell'invaso lineare si ha:

$$u(t) = \frac{1}{k} e^{-t/k}$$

Dal momento che  $u(t)$  è una funzione decrescente il massimo di  $\varepsilon$  si ha per  $t' = t^*$  e quindi:

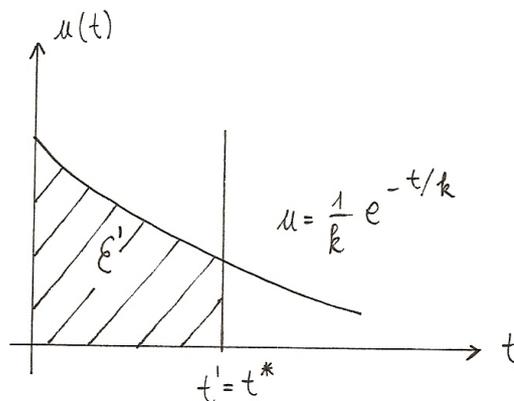


Figura 2.27: IUH definito mediante il metodo dell'invaso lineare.

$$\varepsilon' = 1 - e^{-t^*/k}$$

La portata al colmo di piena vale quindi:

$$Q_c = \frac{A_b \cdot \phi \cdot a \cdot t^{*n-1}}{3,6} \left(1 - e^{-t^*/k}\right) \tag{2.51}$$

#### Portata critica

La portata critica vale:

$$Q_{crit} = \max_{t^*} [Q_c] = \max_{t^*} \left[ \frac{A_b \cdot \phi \cdot a \cdot t^{*n-1}}{3,6} \left(1 - e^{-t^*/k}\right) \right] \tag{2.52}$$

Dal momento che  $Q_c$  è una forma analitica senza punti di discontinuità, la durata  $t_{crit}$  a cui corrisponde la portata al colmo massima può essere calcolata imponendo la condizione:

$$\frac{dQ_c}{dt^*} = \frac{d}{dt^*} \left[ (t^{*n-1}) (1 - e^{-t^*/k}) \right] = 0 \quad (2.53)$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*} (t^{*n-1} \cdot \varepsilon') &= (n-1) \cdot t^{*n-2} \cdot \varepsilon' + t^{*n-1} \cdot \frac{d\varepsilon'}{dt^*} = 0 \\ t^{*n-1} \left( \varepsilon' \frac{n-1}{t^*} + \frac{d\varepsilon'}{dt^*} \right) &= 0 \implies \frac{t^*}{k} e^{-t^*/k} = (1-n) \cdot (1 - e^{-t^*/k}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

L'equazione 2.54 costituisce un'equazione non lineare in  $t^*$  che risolta fornisce il valore della durata  $t^* = t_{crit}$  per cui  $Q_c(t_{crit}) = Q_{crit}$ .

È prassi comune definire un *tempo adimensionale*  $\theta$  definito dal rapporto tra la durata corrispondente alla portata critica e la costante di invaso:

$$\theta = \frac{t_{crit}}{k} \quad (2.55)$$

La relazione 2.54 diventa quindi:

$$\theta e^{-\theta} = (1-n) (1 - e^{-\theta}) \quad (2.56)$$

La quale può essere sviluppata in modo da ottenere una relazione esplicita tra  $n$  e  $\theta$ :

$$n = \frac{1 - (\theta + 1)e^{-\theta}}{1 - e^{-\theta}} \quad (2.57)$$

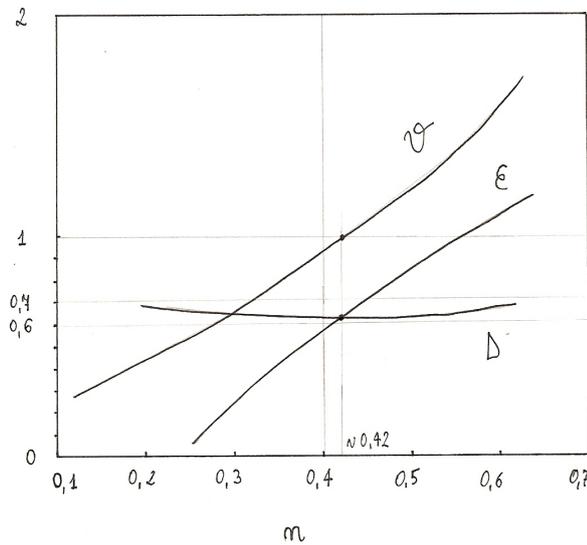


Figura 2.28: Andamento di  $\theta$ ,  $\varepsilon$  e  $D$  in funzione di  $n$ .

La figura 2.28 rappresenta graficamente la relazione 2.57. Si noti come:

- se  $n = 0,42$  allora  $t_{crit} = k$  ( $\theta = 1$ );
- se  $n > 0,42$  allora  $t_{crit} > k$  ( $\theta > 1$ );
- se  $n < 0,42$  allora  $t_{crit} < k$  ( $\theta < 1$ ).

Sfruttando la relazione 2.55 la portata critica può essere espressa come:

$$Q_{crit} = \frac{A_b}{3,6} \phi a k^{n-1} \underbrace{\theta^{n-1}}_D \varepsilon = \frac{A_b}{3,6} \phi a k^{n-1} \underbrace{\theta^{n-1} (1 - e^{-\theta})}_D \quad (2.58)$$

Il valore assunto da  $D$  può anch'esso essere plottato sul medesimo grafico di  $\theta$  e di  $\varepsilon$ .

Effettuando la seguente *approssimazione*:

$$D \approx 0,65 \quad (2.59)$$

allora per un *calcolo approssimato* della portata critica si può utilizzare la relazione:

$$Q_{crit} \approx 0,65 \frac{A_b}{3,6} \phi a k^{n-1} \quad (2.60)$$

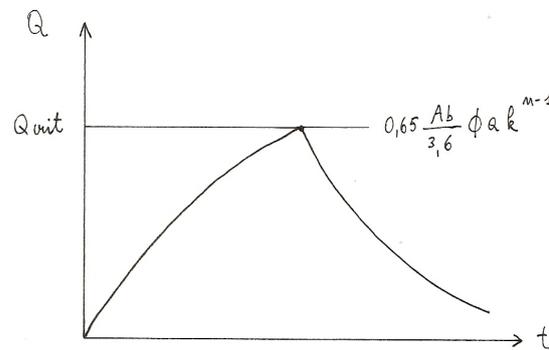


Figura 2.29: Andamento della portata al colmo in funzione della durata.

### 2.5.5 Modello di Nash

#### Portata al colmo di piena

Definendo lo IUH secondo Nash si ha:

$$u(\tau) = \frac{1}{k\Gamma(m)} \left(\frac{\tau}{k}\right)^{m-1} e^{-\tau/k} \quad (2.61)$$

Anche in questo caso bisogna calcolare:

$$\varepsilon' = \max_t \varepsilon = \max_t \left[ \int_{\max(0, t-t^*)}^t u(\tau) d\tau \right]$$

Il massimo di tale integrale si ottiene, per tentativi, cercando  $t'$  tale che:

$$u(t') = u(t' - t^*)$$

Trovato  $t'$  si calcola numericamente l'integrale 2.46 e si applica l'equazione 2.45 trovando quindi la portata al colmo di piena  $Q_c$  per una durata assegnata  $t^*$ .

#### Porta critica

Per trovare la portata critica  $Q_{crit}$  si calcola la portata al colmo di piena per varie durate  $t^*$  e si trova, nuovamente per tentativi, la portata in corrispondenza della quale si passa dall'aumento alla diminuzione del suo valore.

## 2.6 Test statistici di adattamento di una distribuzione

Una volta scelta la famiglia di distribuzioni ed effettuato l'adattamento con uno dei metodi visti ci si chiede se, indipendentemente dal metodo utilizzato, la distribuzione di probabilità cumulata ottenuta  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$ , basata sui parametri di adattamento  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  stimati, sia rappresentativa del campione e quindi se la scelta del modello probabilistico e l'adattamento siano stati soddisfacenti oppure no. Se infatti la distribuzione di probabilità ipotizzata non è corretta, il modello probabilistico risultante con i parametri stimati in qualsiasi maniera, anche la più elegante, non può offrire una corretta rappresentazione del fenomeno fisico o naturale che sta alla base.

Equivalentemente la domanda può essere così formulata: il campione osservato è plausibile che sia estratto a caso dalla distribuzione  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$ ? La risposta può essere data mediante dei *test statistici di adattamento di una distribuzione*.

Essi sono dei metodi per verificare l'adattamento di una distribuzione *ipotizzata* per una determinata variabile aleatoria sulla base di un campione di realizzazioni. Il problema della *verifica di un modello* sulla base di informazioni tratte dai campioni ricade quindi nell'ambito della *verifica delle ipotesi statistiche*.

### Principio che sta alla base dei test statistici di adattamento

Consideriamo la media campionaria di una distribuzione:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

Dal momento che il valore di  $\bar{x}$  cambia al variare di  $x_i$ , allora essa può essere considerata a sua volta come una variabile aleatoria  $P$ . Essa possiede una distribuzione di probabilità  $F_P(p)$  incognita a meno che non si verifichi una certa ipotesi, detta *ipotesi nulla*:  $F_P(p|H_0)$ , che rende nota la distribuzione del parametro  $P$ .

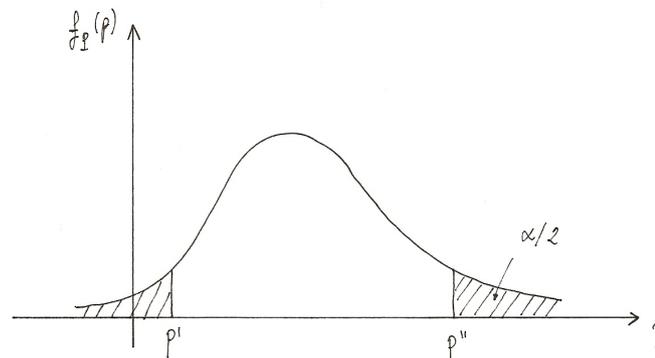


Figura 2.30: Funzione di densità di probabilità della statistica  $P$ .

Se una media campionaria  $p_1$  dovesse cadere nelle zone di coda di tale distribuzione di probabilità allora è possibile ipotizzare che l'ipotesi  $H_0$  non sia vera e quindi che la distribuzione che ne consegue non sia quella giusta.

### 2.6.1 Passi di un test

1. Si definisce una *statistica*  $P$ : regola per calcolare un numero da un campione (esempio: la media). Essa serve a fornire una misura della deviazione della distribuzione osservata, costruita sulla base del campione, dalla distribuzione ipotizzata.
2. Si determina una ipotesi  $H_0$ , detta *ipotesi nulla*, in base alla quale è nota la distribuzione della statistica.

Per costruire un criterio per la verifica delle ipotesi è necessario anche stabilire un'ipotesi alternativa  $H_1$  rispetto alla quale verificare l'ipotesi  $H_0$ . Esempi di ipotesi alternative possono essere:

- un'altra distribuzione ipotizzata;
  - l'ipotesi che  $H_0$  non sia vera: in seguito si farà uso di questa.
3. Si definisce una distribuzione delle *aree di non rigetto*: campo delimitato da  $p'$  e  $p''$  (nel caso di *test a due code*) o solamente da una delle due (nel caso di *test ad una coda*), tale per cui se il valore calcolato della statistica  $P$  è interno si può dire che  $H_0$  è vera, se invece il valore calcolato della statistica è esterno allora si può dire che  $H_0$  è falsa.

Si definisce un *livello di probabilità*  $\alpha$  su cui valutare il campo di rigetto dell'ipotesi  $H_0$ :

$$\alpha = \text{area sottesa da } f_P(p) \text{ prima e dopo } p' \text{ e } p''$$

I test per la verifica delle ipotesi sono comparati in termini della probabilità degli errori che possono essere commessi. Si possono presentare due tipi di errore di base:

- (a) *errore del I tipo*:  $H_0$  è vera ma l'ipotesi viene comunque rigettata ( $\alpha$  grande);
- (b) *errore del II tipo*:  $H_0$  è falsa ma l'ipotesi viene comunque accettata ( $\alpha$  piccolo).

Definendo  $H_1$  come l'ipotesi esattamente opposta di  $H_0$  si ha che:

- se  $\alpha$  è grande allora  $\beta$ , corrispondente alla probabilità di accettare  $H_0$  quando  $H_0$  è falsa (e quindi  $H_1$  vera), è piccola (errore del I tipo grande);
- se  $\alpha$  è piccolo allora  $\beta$  è grande (errore del II tipo grande);

ne consegue che la scelta della probabilità  $\alpha$  è legata al fatto che al diminuire della probabilità di commettere un errore di un tipo aumenta quella di commettere l'altro. Nel costruire un test statistico c'è quindi la necessità di controllare i due tipi di errori cercando di minimizzare l'errore globale. Per un dato test, la valutazione della probabilità degli errori del I tipo può essere fatta quando l'ipotesi  $H_0$  è data e quindi è specificata la distribuzione di probabilità; la definizione di un'ipotesi alternativa implica delle probabilità di commettere errori del II tipo. Nel nostro caso l'ipotesi alternativa è semplicemente l'ipotesi che  $H_0$  non sia vera e quindi il fatto che la classe delle alternative sia così ampia rende difficile l'utilizzo degli errori del II tipo come criterio.

Generalmente si lavora solamente con errori del I tipo, fissando i seguenti *limiti di confidenza*:

$$\alpha = \begin{cases} 1\% \\ 5\% \\ 10\% \end{cases}$$

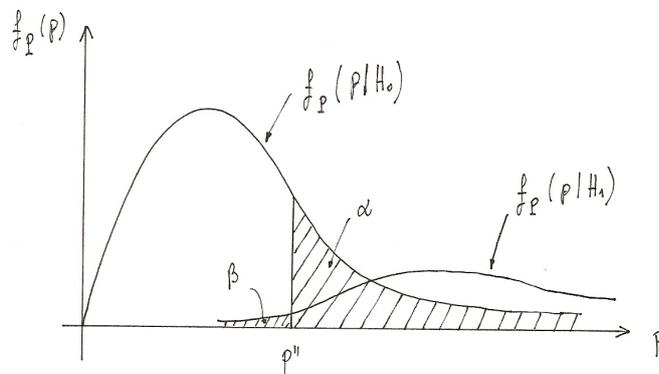


Figura 2.31: Correlazione tra errore del I tipo ed errore del II tipo.

4. Calcolo di  $p'_\alpha$  e  $p''_\alpha$ .

Nel caso di test ad una coda destra si cerca:

$$p''_\alpha : \text{prob}(P \leq p''_\alpha) = F_P(p''_\alpha) = 1 - \alpha$$

Nel caso di test a due code si cerca:

$$p'_\alpha : \text{prob}(P \leq p'_\alpha) = F_P(p'_\alpha) = \alpha/2 \quad p''_\alpha : \text{prob}(P \leq p''_\alpha) = F_P(p''_\alpha) = 1 - \alpha/2$$

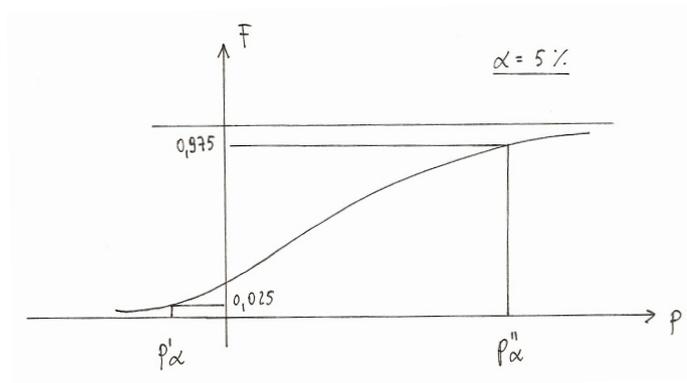


Figura 2.32: Determinazione di  $p'_\alpha$  e  $p''_\alpha$  per  $\alpha = 95\%$ .

5. Si calcola la statistica dal campione ottenendo un valore  $p^*$  che viene confrontato con  $p'_\alpha$  e  $p''_\alpha$ :

- se  $p'_\alpha \leq p^* \leq p''_\alpha$ :  $H_0$  con probabilità  $1 - \alpha$  è vera;
- se  $p^* > p''_\alpha \vee p^* < p'_\alpha$ :  $H_0$  con probabilità  $1 - \alpha$  è falsa.

**Ipotesi  $H_0$  dei test statistici di adattamento**

Nel caso dei test statistici di adattamento  $H_0$  è che il campione osservato  $[x_i; i = 1, 2, \dots, N]$  rappresenti  $N$  valori della funzione di distribuzione cumulata stimata  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$ . Ciò equivale a supporre a che  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$  sia la vera distribuzione di probabilità che dà luogo al campionamento effettuato.

**2.6.2 Test  $\chi^2$** 

Il test statistico  $\chi^2$  di adattamento (chi-squared goodness-of-fit test) fu introdotto da Pearson nel 1900.

Consideriamo il caso, che più comunemente capita di affrontare, in cui i parametri della distribuzione di probabilità siano stati stimati con uno dei metodi visti in precedenza sulla base del campione. Al fine di verificare l'ipotesi  $H_0$  si definisce come *statistica* del campione la differenza tra il *diagramma della frequenza empirica*, costruita dal campione, e la corrispondente *funzione di densità di probabilità* definita per ipotesi.

La frequenza cumulata empirica può essere valutata mediante la regola di Weibull:

$$F_i = \frac{i}{N + 1}$$

Per poter definire empiricamente la funzione di densità di probabilità  $f_X(x)$  è necessario valutare la *frequenza per classi*: si suddivide l'asse  $x$  in una serie di classi contigue e si contano quanti eventi sono avvenuti in ciascuna classe.

$$1^{\text{a}} \text{ classe : } x < x_1 \quad 2^{\text{a}} \text{ classe : } x_1 \leq x < x_2 \quad \dots \quad M + 1 - \text{esima classe : } x_M \leq x$$

Se si hanno  $M$  separatori  $x_1, x_2, \dots, x_M$  allora il numero di classi  $M_c = M + 1$ .

**Probabilità osservata**

La *probabilità osservata* associata alla classe  $i$ -esima è data dalla frequenza empirica:

$$f_i = \frac{O_i}{x_i - x_{i-1}} \tag{2.62}$$

- $O_i$ : numero di eventi osservati che ricadono nella classe  $(x_{i-1}, x_i)$ ;
- $x_i - x_{i-1}$ : ampiezza della classe.

Il *numero di eventi osservati* ricadenti nella classe  $i$ -esima vale quindi:

$$O_i = f_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \tag{2.63}$$

**Probabilità teorica**

Come si è detto nella classe generica  $(x_{i-1}, x_i)$  non ricadono solo le osservazioni bensì anche eventi estratti direttamente dalla distribuzione teorica  $f_X(x; \hat{a}, \hat{b})$  ipotizzata.

La *probabilità teorica* associata alla classe  $i$ -esima è data da:

$$p_i = \text{prob}(x_{i-1} \leq x < x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_X(x; \hat{a}, \hat{b}) dx = F_X(x_i; \hat{a}, \hat{b}) - F_X(x_{i-1}; \hat{a}, \hat{b}) \tag{2.64}$$

Se il campione è composto da  $N$  eventi il *numero di eventi atteso* nell' $i$ -esima classe è dato da:

$$E_i = N \cdot p_i \tag{2.65}$$

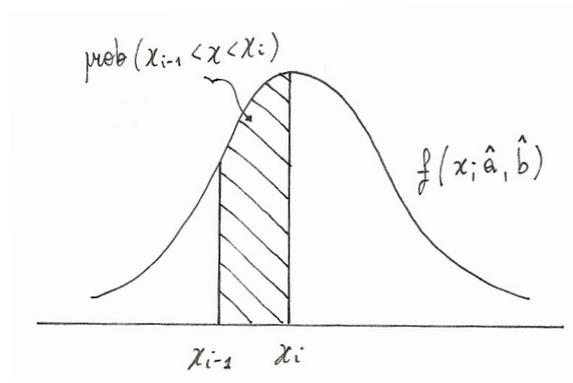


Figura 2.33: Probabilità teorica associata alla classe  $(x_{i-1}, x_i)$ .

**Statistica del test**

La statistica del test è data da:

$$D = \sum_{k=1}^{M_c} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \tag{2.66}$$

Essa costituisce una naturale misura della deviazione ai minimi quadrati. Si noti come  $D$  sia una statistica in quanto è funzione degli  $O_i$ , i quali a loro volta sono funzione del campione  $x_1, \dots, x_N$ .

Se la distribuzione che genera il campione è proprio quella che si è stimato, ossia l'ipotesi  $H_0$  è vera, si può dimostrare che la statistica  $D$  ha una distribuzione del tipo  $\chi^2$ :

$$f_D(d) = \chi^2(D, \nu) = \begin{cases} [2^{\nu/2} \Gamma(\frac{\nu}{2})]^{-1} d^{(\nu-2)/2} e^{-d/2} & \text{se } d \geq 0 \\ 0 & \text{se } d < 0 \end{cases} \tag{2.67}$$

- $\nu = M_c - 1 - n_p$ : parametro che definisce i *gradi di libertà*, con  $n_p$  pari al *numero di parametri stimati* (nel nostro caso 2:  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ ).

Si noti come questa distribuzione sia *indipendente* dal tipo di distribuzione ipotizzata.

### Livello di confidenza

Supponiamo di voler accettare una probabilità di errore del I tipo pari ad  $\alpha$ . Il test  $\chi^2$  prevede che l'ipotesi  $H_0$  venga respinta quando:

$$d = \sum_{k=1}^{M_c} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} > \chi_{\alpha, \nu}^2 \quad (2.68)$$

dove  $d$  è il valore di  $D$  basato sui valori del campione  $x_i, i = 1, \dots, n$  e  $\chi_{\alpha, \nu}^2$  assume un valore tale che:

$$\text{prob}(D > \chi_{\alpha, \nu}^2) = \alpha \quad (2.69)$$

il cui valore si ottiene mediante tabelle in funzione di  $\alpha$  e dei gradi di libertà  $\nu$ .

Il valore di  $\alpha$  è detto anche *livello di confidenza*: esso rappresenta l'area sottesa dalla funzione  $f_D(d)$  alla destra di  $\chi_{\nu, \alpha}^2$ . Se per esempio  $\alpha = 0,05$  significa che effettuando il test si respinge l'ipotesi  $H_0$  nel caso in cui la misura della deviazione  $d$ , calcolata da un determinato campione, cade all'interno della regione del 5%, o, in altre parole, ci si aspetta di respingere  $H_0$  per il 5% dei casi in cui  $H_0$  è vera.

### Procedura di esecuzione del test

1. Si suddivide l'asse  $x$  in un numero  $M_c$  di classi e si valutano per ogni classe il *numero di eventi osservati*  $O_k$  che vi cadono dentro.

Dal momento che solitamente si preferisce lavorare con delle classi equiprobabili, ossia con un numero costante di eventi attesi per ogni classe:

$$E_1 = E_2 = \dots = E_k = \frac{N}{M_c}$$

avente quindi probabilità:

$$p_k = \frac{E_k}{N} = \frac{1}{M_c}$$

la suddivisione delle classi sull'asse  $x$  viene effettuata in modo tale che, se l'ipotesi  $H_0$  è vera, allora ci si dovrebbe aspettare un numero uguale di eventi osservati in ogni classe. Per garantire questo risultato l'ampiezza degli intervalli viene trovata con l'operazione riportata in figura 2.34.

2. Si stimano, a partire dai dati, i parametri  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  di adattamento, mediante il metodo di massima verosimiglianza (od un altro metodo), ottenendo  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$ .
3. Si calcola, a partire dalla distribuzione ipotizzata con i parametri stimati, il *numero di eventi atteso*  $E_k$  per ogni classe (equazioni 2.64 e 2.65)
4. Si costruisce il valore misurato  $d$  della statistica (equazione 2.66).
5. Si sceglie un livello di confidenza  $\alpha$  e si determina  $\chi_{\nu, \alpha}^2$ .
6. Si rifiuta l'ipotesi  $H_0$  se  $d > \chi_{\nu, \alpha}^2$ , altrimenti la si accetta.

I *vincoli di affidabilità* del test sono:

- affinché il test sia significativo:  $\nu \geq 2 \implies M_c \geq 5 \implies M \geq 4$
- $E_k \geq 5 \forall k$  (almeno 5 eventi per classe);
- ( $\implies N \geq 25$ ).

Il test  $\chi^2$  è definito un *test esatto* nel senso che tiene conto del fatto che si sono utilizzati i *medesimi parametri di adattamento* sia per l'esecuzione del test che per la valutazione del numero di eventi attesi.

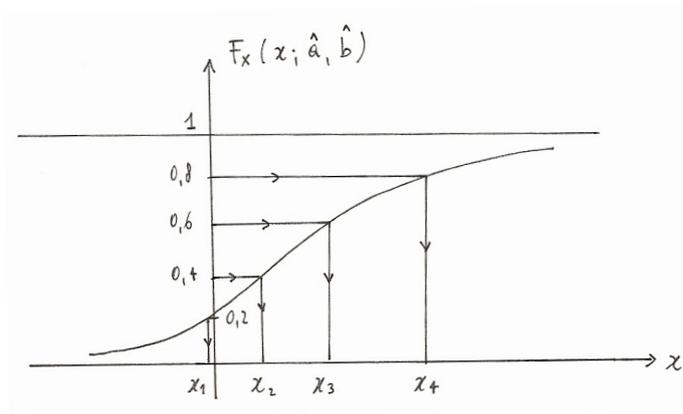


Figura 2.34: Determinazione dell'ampiezza delle classi ( $M_c = 5$ ) in modo che siano equiprobabili.

### 2.6.3 Test di Kolmogorov–Smirnov

Il *test di Kolmogorov–Smirnov* (K-S test) si basa su una statistica che misura la deviazione dell'istogramma cumulato di frequenza rispetto alla funzione di distribuzione cumulata ipotizzata  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$ .

Data un insieme di valori campionari  $x_1, x_2, \dots, x_N$  di una variabile aleatoria  $X$  si possono considerare due istogrammi di frequenza cumulata (*diversi* da quello ottenuto con la regola di Weibull):

$$F_i^+ = \frac{i}{N} \qquad F_i^- = \frac{i-1}{N} \qquad (2.70)$$

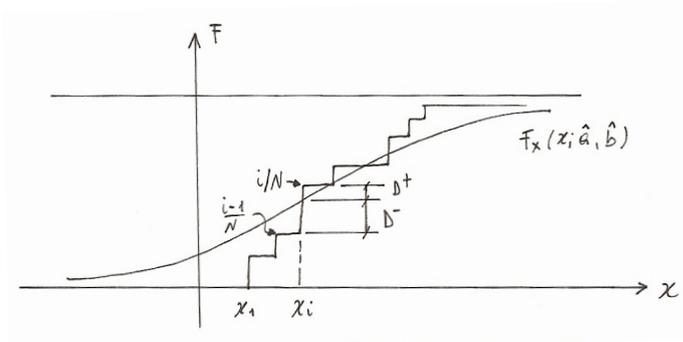


Figura 2.35: Approssimazioni empiriche della funzione di distribuzione cumulata.

#### Statistica del test

Rispetto alle due frequenze cumulate empiriche definite è possibile valutare due *distanze*:

$$D_i^- = \left| F_X(x_i) - \frac{i-1}{N} \right| \qquad D_i^+ = \left| F_X(x_i) - \frac{i}{N} \right| \qquad (2.71)$$

La *statistica* del test è definita da:

$$D_2 = \max_{i=1}^N [D_i^+; D_i^-] \qquad (2.72)$$

La distribuzione della statistica  $D_2$  è difficile da ottenere *analiticamente*, tuttavia i valori assunti

Tabella 2.3: Costruzione delle CDF empiriche e delle distanze.

Ordine	Osservazione	$F_i^-$	$F_i^+$	$D^-$	$D^+$
1	$x_1$	$\frac{1-1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$ F_X(x_1) - \frac{1-1}{N} $	$ F_X(x_1) - \frac{1}{N} $
...	...	...	...	...	...
i	$x_i$	$\frac{i-1}{N}$	$\frac{i}{N}$	$ F_X(x_i) - \frac{i-1}{N} $	$ F_X(x_i) - \frac{i}{N} $
...	...	...	...	...	...
N	$x_{\max}$	$\frac{N-1}{N}$	$\frac{N}{N}$	$ F_X(x_N) - \frac{N-1}{N} $	$ F_X(x_N) - \frac{N}{N} $

dalla funzione di distribuzione possono essere calcolati numericamente e valutati per numerosi valori. È tuttavia possibile dimostrare che la distribuzione di  $D_2$  è indipendente dalla distribuzione ipotizzata e che, fissato un livello di confidenza  $\alpha$ , se  $N$  diventa grande ( $N \geq 50$ ) allora:

$$c_{\alpha,N} = \frac{v_\alpha}{\sqrt{N}}$$

-  $v_\alpha$ : valore che dipende da  $\alpha$ .

### Livello di confidenza

Supponiamo di voler accettare una probabilità di errore del I tipo pari ad  $\alpha$ . Il K-S test prevede che l'ipotesi  $H_0$  venga respinta quando:

$$d_2 = \max_{i=1}^N [D_i^+; D_i^-] > c_{\alpha,N} \quad (2.73)$$

dove  $d_2$  è il valore di  $D_2$  basato sui valori del campione  $x_i, i = 1, \dots, N$  e  $c_{\alpha,N}$  assume un valore tale che:

$$\text{prob}(D_2 > c_{\alpha,N}) = \alpha \quad (2.74)$$

il cui valore si ottiene, mediante tabelle, in funzione di  $\alpha$  e di  $N$ .

### Procedura di esecuzione del test

1. Si riordinano i valori  $x_i$  osservati dal più piccolo al più grande.
2. Si valutano le funzioni empiriche  $F_i^+$  e  $F_i^-$ .
3. Per ogni  $x_i$  si valuta  $F_X(x_i)$  mediante la distribuzione ipotizzata, eventualmente adattata mediante uno dei metodi visti.
4. Si costruiscono le differenze  $D_i^+$  e  $D_i^-$ .
5. Si calcola la statistica  $d_2$  (equazione 2.72).
6. Si sceglie un livello di confidenza  $\alpha$  e si determina mediante tabelle  $c_{\alpha,N}$ .
7. Si rifiuta l'ipotesi  $H_0$  se  $d_2 > c_{\alpha,N}$ , altrimenti la si accetta.

L'esecuzione del test può essere anche di tipo grafico (figura 2.36) tracciando una fascia di accettabilità compresa tra la  $F_X(x; \hat{a}, \hat{b})$  e  $\pm c_{\alpha,N}$  e verificando che l'istogramma di frequenza cumulata empirica sia sempre interno a tale fascia.

### Osservazioni

Le caratteristiche principali del K-S test sono:

- è valido per tutti i valori di  $N$  (a differenza del test  $\chi^2$ );
- utilizza i dati osservati nella loro forma non aggregata (a differenza del test  $\chi^2$ );

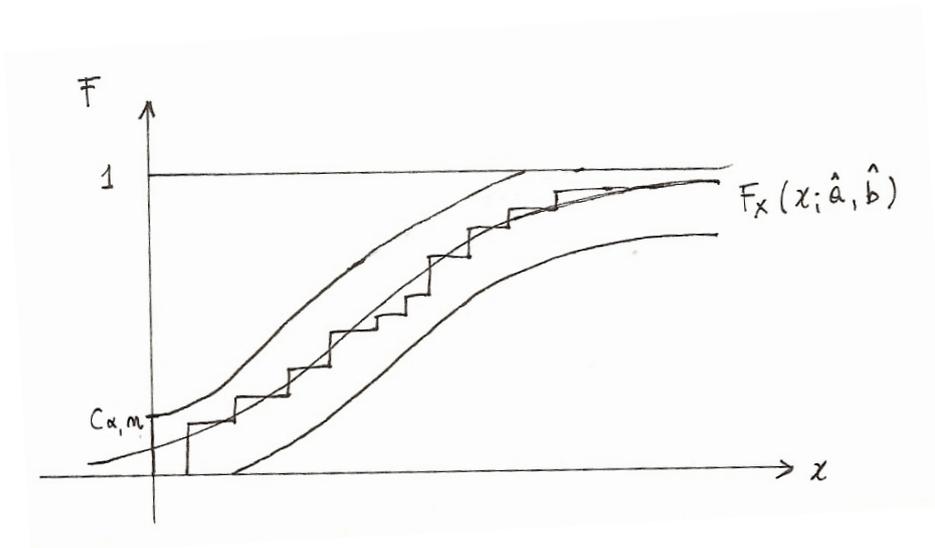


Figura 2.36: Esecuzione grafica del test di Kolmogorov–Smirnov.

- è valido solamente per distribuzioni continue;
- i valori di  $c_{\alpha, N}$  si basano su distribuzioni ipotizzate completamente specificate (ossia senza stima dei parametri di adattamento), quando i parametri della distribuzione devono venir stimati allora non esiste, a differenza del test  $\chi^2$ , alcun modo rigoroso per correggere il test.

## 2.7 Esercizi

### 2.7.1 Determinazione della LPP

#### Dati

Alla stazione meteorologica di Gemona si sono registrati i seguenti valori di pioggia, di cui si riportano solamente alcuni valori delle medie e delle deviazioni standard campionarie.

$d$	1 ora	3 ore	6 ore	12 ore	24 ore
$N$	50	50	50	50	50
$\bar{h}$ (mm)	42,60	...	...	...	...
$\sigma_h$ (mm)	14,05	...	...	...	...

#### Svolgimento semi-concettuale

Supponiamo di aver effettuato un'adattamento statistico col metodo dei momenti e di aver trovato per le 5 distribuzioni i parametri di adattamento  $\alpha$  e  $\beta$ . Fissato un tempo di ritorno, ad esempio pari a 10 anni, si calcola la corrispondente variabile regolarizzata di Gumbel e si trovano 5 valori di altezza di pioggia.

$d$ :	1 ora	3 ore	6 ore	12 ore	24 ore
$h$ :	61, mm	90 mm	108 mm	134 mm	176 mm
$j$ :	61 mm/h	30 mm/h	18 mm/h	11,2 mm/h	7,3 mm/h

Si passa dunque alla stima dei parametri  $a$  ed  $n$  della LPP in base alla relazione:

$$\ln h = \ln a + n \ln t$$

$t$	$\ln t$	$\ln h$
1	0,00	4,11
3	1,10	4,50
6	1,79	4,68
12	2,48	4,90
24	3,18	5,17

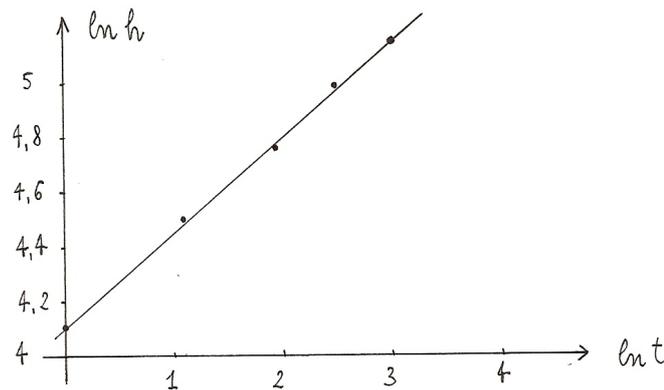


Figura 2.37: Determinazione dei parametri  $a$  ed  $n$ .

Dall'interpolazione grafica lineare dei valori calcolati si ottiene:

$$n \approx 0,31$$

$$a \approx 60$$

L'equazione della LPP è quindi:

$$h = 60t^{0,31}$$

## 2.7.2 Valutazione della durata critica

### Dati

La LPP è definita da  $h = 60t^{0,31}$ , l'area del bacino è pari a  $A_b = 150 \text{ Km}^2$  ed il coefficiente d'invaso vale  $\phi = 0,35$ . Si valuti la durata critica sia col metodo dell'invaso lineare con coefficiente d'invaso  $k = 2,5$  ore sia col metodo di Nash con  $m = 2$ .

### Svolgimento

Col *metodo dell'invaso lineare* si deve risolvere l'equazione non lineare in  $t^*$ :

$$t^* = (1 - n) \left(1 - e^{-t^*/k}\right) e^{t^*/k} k$$

Da cui sostituendo i valori numerici si ha:

$$t^* - 1,725 \left(1 - e^{-t^*/2,5}\right) e^{t^*/2,5} = 0$$

La quale può essere risolta per tentativi mediante alcune iterazioni:

- $t^* = 2$  ore:  $\implies -1,06$
- $t^* = 1,5$  ore:  $\implies 0,08$
- $t^* = 1,6$  ore:  $\implies 0,05$
- $t^* = 1,7$  ore:  $\implies 0,02$
- $t^* = 1,8$  ore:  $\implies 0,018$

Si può assumere con buona approssimazione  $t_{crit} \approx 1,8$  ore.

Col *metodo di Nash* si deve seguire la procedura riportata nel paragrafo 2.5.5. ...



## 2.8 Appendice

### 2.8.1 Alcune distribuzioni di probabilità

Caratteristiche salienti di alcune distribuzioni standardizzate

Nome	Espressione	Parametri	Campo	Media	Moda	Mediana	Varianza	Asimmetria	Curtosi
Binomiale	$P(X = m) = \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}$	$N, p$	$0 \div N$	$np$			$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p}{\sqrt{np(1-p)}}$
Poisson	$P(X = m) = \frac{\tau^m}{m!} \exp(-\tau)$	$\tau$	$0 \div \infty$	$\tau$	$\max(\text{INT} \leq \tau)$		$\tau$	$1/\sqrt{\tau}$	$3 + 1/\sqrt{\tau}$
Uniforme	$f_x(x) = 1$ se $0 \leq x \leq 1$ $f_x(x) = 0$ altrimenti	-	$0 \div 1$	0.5	-	0.5	1/12	0	9/5
Normale	$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$	-	$-\infty \div \infty$	0	0	0	1	0	3
Gamma incompleta <sup>1</sup>	$f_x(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x)$	$\alpha$	$0 \div \infty$	$\alpha$	$\alpha-1$ solo se $\alpha > 1$		$\alpha$	$2/\sqrt{\alpha}$	$3 + 6/\sqrt{\alpha}$
Esponenziale	$F_x(x) = 1 - \exp(-x)$	-	$0 \div \infty$	1	0	0.693	1	2	9
Gumbel (EV1)	$F_x(x) = \exp[-\exp(-x)]$	-	$-\infty \div \infty$	0.5772	0	0.3665	$\frac{\pi^2}{6}$	1.1396	5.4

<sup>1</sup> Conosciuta anche come Pearson III Tipo e legata alla distribuzione Chi quadro

Caratteristiche salienti di alcune distribuzioni derivate

Nome	Espressione	Par.	Campo	Media	Moda	Mediana	Varianza	Asimmetria	Curtosi
Uniforme	$f_x(x) = \frac{x-a}{b-a}$ in $a \leq x \leq b$	$a, b$	$a \div b$	$(a+b)/2$	-	$(a+b)/2$	$\frac{1}{12}(b-a)^2$	0	9/5
Normale 2 parametri	$f_x(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right)$	$a, b$	$-\infty \div \infty$	$b$	$b$	$b$	$a^2$	0	3
Gamma incompleta a 2 parametri	$f_x(x) = \frac{1}{k\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{k}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{k}\right)$	$\alpha, k$	$0 \div \infty$	$k\alpha$			$k^2\alpha$	$2/\sqrt{\alpha}$	$3+6/\sqrt{\alpha}$
Gamma incompleta a 3 parametri	$f_x(x) = \frac{1}{k\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x-\beta}{k}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x-\beta}{k}\right)$	$\alpha, \beta, k$	$0 \div \infty$	$k\alpha+\beta$			$k^2\alpha$	$2/\sqrt{\alpha}$	$3+6/\sqrt{\alpha}$
Esponenziale a 1 parametro	$F_x(x) = 1 - \exp(-x/k)$	$k$	$0 \div \infty$	$k$	0	$0.693 k$	$k^2$	2	9
Esponenziale a 2 parametri	$F_x(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x-\beta}{k}\right)$	$k, \beta$	$\beta \div \infty$	$k + \beta$	$\beta$	$0.693 k + \beta$	$k^2$	2	9
Gumbel (EV1)	$F_x(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-b}{a}\right)\right]$	$a, b$	$-\infty \div \infty$	$b + 0.5772a$	$b$	$b + 0.3665 a$	$\frac{(a\pi)^2}{6}$	1.1396	5.4

## 2.8.2 Valori di $c_{\alpha,N}$ per il test di Kolmogorov-Smirnov

### Kolmogorov-Smirnov Test

(Se il rapporto calcolato è maggiore del valore sotto indicato, si rigetti l'ipotesi nulla al livello di confidenza prescelto.)

DIMENSIONE CAMPIONARIA (N)	LIVELLO di SIGNIFICATIVITÀ per $D = \text{MAX} [ F_0(X) - S_n(X) ]$				
	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.210	.220	.240	.270	.320
30	.190	.200	.220	.240	.290
35	.180	.190	.210	.230	.270
OLTRE 35	$\frac{1.07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{N}}$



## Capitolo 3

# Correnti a pelo libero

### 3.1 Generalità

Si tratta essenzialmente delle correnti idriche che percorrono i *corsi d'acqua naturali* (fiumi, torrenti) o i *canali artificiali* (di bonifica, di irrigazione, di fognatura, di impianti idroelettrici, di navigazione interna).

Queste correnti sono caratterizzate dall'aver la parte superiore della superficie di contorno non a contatto con una parete solida, bensì con un gas, che nella più grande generalità dei casi è l'atmosfera. Questa superficie si dice *superficie libera* o *pelo libero*, essa è una *superficie isobarica* ( $p = \text{cost}$ ), almeno se si considerano tronchi di corrente non eccessivamente estesi.

#### 3.1.1 Ipotesi

##### Studio a grande scala

Lo studio delle correnti a pelo libero viene effettuato su grande scala, non andando quindi ad indagare su ciò che avviene puntualmente (per lo studio dei cui fenomeni si rendono necessarie le equazioni di Navier-Stokes). Invece quindi di ragionare in termini di forze e sforzi si ragiona in termini di *energia* (grandezza scalare) e *quantità di moto* (grandezza vettoriale).

##### Correnti lineari o gradualmente variate

Salvo situazioni eccezionali, in genere limitate a brevi tratti di corrente e che andranno esaminate caso per caso con apposita trattazione, si fa riferimento al caso delle *correnti lineari* o *gradualmente variate*: esse sono caratterizzate da una trascurabile curvatura delle singole traiettorie e quindi da una *distribuzione sensibilmente idrostatica della pressione* in ogni sezione trasversale.

Ne consegue che l'intersezione di una generica sezione trasversale con la superficie libera risulta una *retta orizzontale*.

È possibile quindi parlare della *quota del pelo libero* di una generica sezione e definire un *profilo longitudinale del pelo libero della corrente*, o più semplicemente *profilo del pelo libero*, come linea d'intersezione della superficie libera col cilindro a generatrici verticali contenente una generica traiettoria (il quale si discosterà assai poco da un piano verticale).

##### Teoria unidimensionale

Lo studio del moto può essere condotto secondo la teoria unidimensionale, con riferimento cioè ad *una sola coordinata spaziale*: l'ascissa curvilinea  $s$  misurata lungo una traiettoria. Ne consegue che del *vettore velocità*  $\vec{v}$  si considera solamente la *componente assiale* e si trascurano le componenti orizzontali e verticali nel piano della sezione.

Tale teoria viene inoltre *ulteriormente semplificata* ipotizzando che la *pendenza dell'alveo* in cui si muove la corrente, e quindi la pendenza di tutte le traiettorie e del profilo del pelo libero, siano trascurabili, sicché le *sezioni trasversali* possano assimilarsi, senza sensibile errore, a *piani verticali*. Tale ipotesi risulta ben accettabile in quanto valori tipici di pendenza dei corsi d'acqua sono:

- lungo i fondo valle: 1/100;
- lungo i conoidi: 1/1.000;
- lungo le pianure alluvionali: 1/10.000.

Così facendo si possono inoltre prendere le *componenti orizzontali* di spostamento e di velocità al posto di quelle lungo l'ascissa della traiettoria:

$$i_f = -\frac{dz_f}{ds} \approx -\frac{dz_f}{dx} \quad v_s \approx v_x \quad (3.1)$$

### 3.2 Caratteristiche energetiche della corrente in una sezione

Si fissi l'attenzione su una generica sezione trasversale di una corrente. Sia *assegnata la geometria* della sezione, in modo che l'area  $\Omega$  della parte di essa occupata dalla corrente (*area bagnata* o *area della sezione liquida*) possa considerarsi *funzione nota dell'altezza  $y$*  misurata a partire dal punto più basso del contorno:

$$\Omega = \Omega(y) \quad (3.2)$$

Il *carico totale* della corrente vale:

$$H = z_f + y + \alpha \frac{V^2}{2g} = h + h_c \quad (3.3)$$

- carico o quota *geodetica*:  $z_f$ ;
- carico o altezza *piezometrica*:  $y$ ;
- carico o altezza *cinetica*:  $h_c = \alpha V^2 / (2g)$ 
  - $V$ : velocità media nella sezione trasversale:  $V = (\int_{\Omega} v \, d\Omega) / \Omega = Q / \Omega$
  - $\alpha$ : coefficiente di Coriolis; serve a tener conto della non uniforme distribuzione della velocità nella sezione trasversale. Nel seguito si ipotizzerà sempre  $\alpha = 1$ .

Si definisce *energia specifica* della corrente nella sezione considerata il carico totale misurato rispetto al fondo dell'alveo:

$$E = y + \alpha \frac{V^2}{2g} = y + \alpha \frac{Q^2}{2g\Omega^2} = H - z_f \quad (3.4)$$

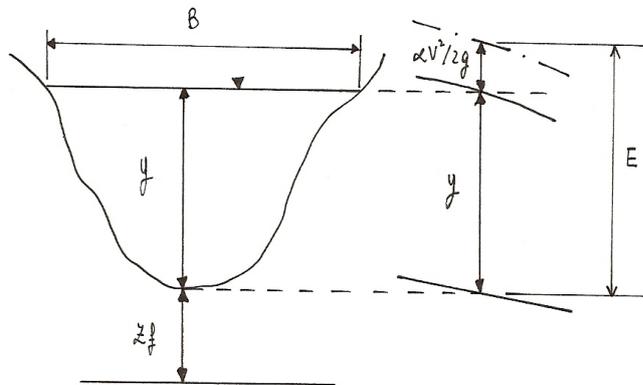


Figura 3.1: Carico totale ed energia specifica.

#### 3.2.1 Portata assegnata

Supponiamo *prefissata la portata  $Q$*  della corrente. Tale portata può muoversi attraverso l'assegnata sezione trasversale per ogni valore dell'altezza  $y$  e quindi dell'area bagnata  $\Omega$  compreso tra lo zero ed il massimo consentito dalla sezione: aumentando  $y$ , e quindi  $\Omega$ , diminuirà la velocità media  $V$  della corrente e viceversa.

Ne risulta che l'energia specifica è una *funzione univoca* dell'altezza  $y$ :

$$E = E(y) \quad (3.5)$$

- Se la profondità  $y$  diminuisce, tendendo a zero, tende a zero l'area  $\Omega$ , aumenta e tende all'infinito la velocità  $V$ , e quindi l'energia specifica  $E$  tende all'infinito.

- Se la profondità  $y$  aumenta, tendendo all'infinito, tende all'infinito l'area  $\Omega$ , diminuisce e tende a zero la velocità  $V$  e quindi il carico cinetico, di conseguenza l'energia specifica  $E$  tende a ridursi alla sola parte piezometrica  $y$ , ma con essa cresce pure indefinitamente.

La curva dell'energia specifica  $E(y)$  deve quindi avere un asintoto coincidente con l'asse delle  $E$  e un altro asintoto obliquo nella retta coincidente con la bisettrice del quadrante, di equazione  $E = y$ . Ne consegue che, essendo la  $E(y)$  positiva, essa deve presentare un *minimo* per un ben determinato valore positivo di  $y$ .

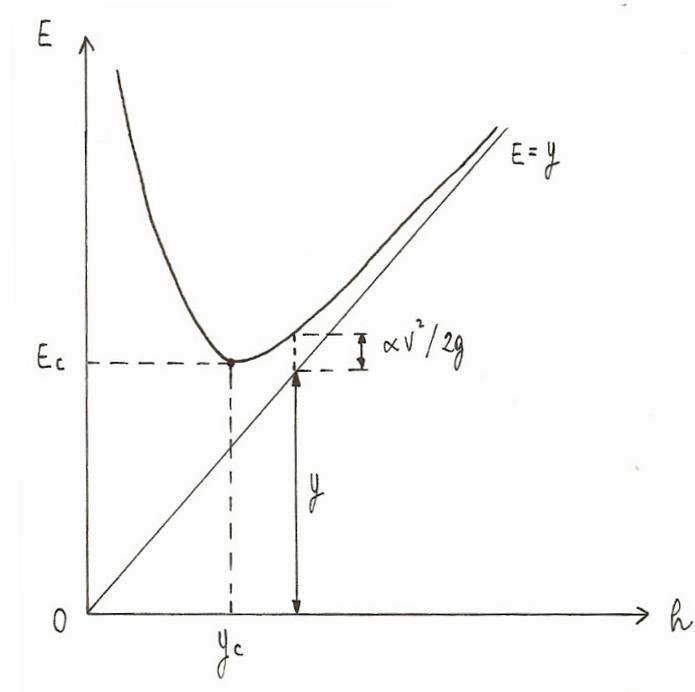


Figura 3.2: Curva dell'energia specifica  $E = E(y)$ .

La *condizione di minimo* si trova imponendo:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - 2 \frac{Q^2}{2g\Omega^3} \cdot \frac{d\Omega}{dy} = 0 \quad (3.6)$$

Incrementando di  $dy$  l'altezza  $y$  l'incremento di area bagnata vale  $d\Omega = B \cdot dy + k(dy)^2$  e quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore in  $dy$ , si ha  $d\Omega/dy = B$ , con  $B = B(y)$ .

Il minimo di  $E$  si ha quindi per quel valore di  $y$  per cui risulta:

$$\frac{\Omega^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \quad (3.7)$$

Il valore di  $y$  che soddisfa la relazione 3.7 viene indicata con  $y_c$  e si dice *altezza critica*.

### Stato critico

Dicesi *altezza critica* di una corrente a pelo libero di assegnata portata  $Q$ , quell'altezza  $y_c$  per cui risulta minima l'energia specifica  $E$  rispetto al fondo dell'alveo.

Dicesi *stato critico* della corrente quella particolare condizione in cui essa viene a trovarsi quando la sua altezza assume valore critico.

Dicesi *velocità critica*  $V_c$  la velocità media corrispondente allo stato critico. Dalla relazione 3.7 si ha:

$$V_c^2 = \frac{Q^2}{\Omega_c^2} = g \frac{\Omega_c}{B_c} \quad (3.8)$$

Poiché il rapporto  $y_m = \Omega/B$  rappresenta genericamente la profondità media della corrente ed indicando con  $y_{mc}$  il valore che  $y_m$  assume in corrispondenza dello stato critico, la relazione 3.8 può scriversi come:

$$V_c = \sqrt{g \cdot y_{mc}} \tag{3.9}$$

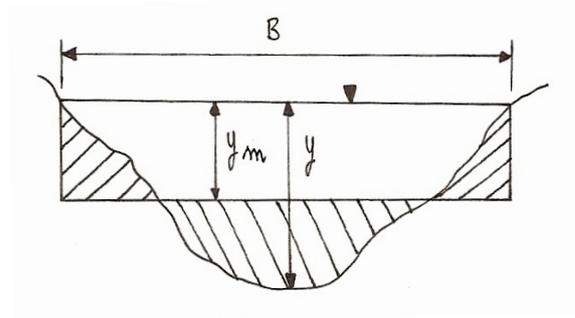


Figura 3.3: Profondità media della corrente.

**Sezioni rettangolari**

Nel caso delle sezioni rettangolari la trattazione risulta estremamente semplice dal punto di vista analitico. Si può fare riferimento in questo caso ad una *portata unitaria*, per unità di larghezza dell'alveo:

$$q = \frac{Q}{B} \tag{3.10}$$

Essendo  $\Omega = By$ , si ricava subito dalla 3.7 che:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \tag{3.11}$$

e dalla 3.9, essendo in ogni caso  $\Omega/B = y_m = y$ :

$$V_c = \sqrt{g \cdot y_c} \tag{3.12}$$

Il valore minimo dell'energia specifica può infine essere ricavato dalla 3.4:

$$E_{\min} = E_c = y_c + \frac{y_c}{2} = \frac{3}{2}y_c \tag{3.13}$$

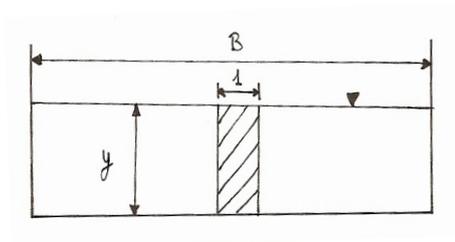


Figura 3.4: Sezione rettangolare.

Nel caso particolare della sezione rettangolare si ha dunque che, in corrispondenza dello stato critico, un carico cinetico pari alla metà dell'altezza della corrente ed un'energia specifica pari a 3/2 della profondità stessa.

### Sezioni di forma generica

Poiché vale la relazione 3.9, per una sezione di forma generica si può scrivere:

$$E_c = y_c + \frac{y_{mc}}{2} \quad (3.14)$$

### Correnti veloci e correnti lente

Ogni punto della curva  $E(y)$  rappresenta una particolare corrente di portata  $Q$ . Il punto di minimo divide la curva in due tratti.

- il tratto a *sinistra* del punto di minimo rappresenta correnti che hanno un'altezza  $y$  minore dell'altezza critica  $y_c$  e quindi una velocità media  $V$  maggiore della velocità critica  $V_c$ : *correnti veloci*;
- il tratto a *destra* del punto di minimo rappresenta correnti che hanno un'altezza  $y$  maggiore dell'altezza critica  $y_c$  e quindi una velocità media  $V$  minore della velocità critica  $V_c$ : *correnti lente*.

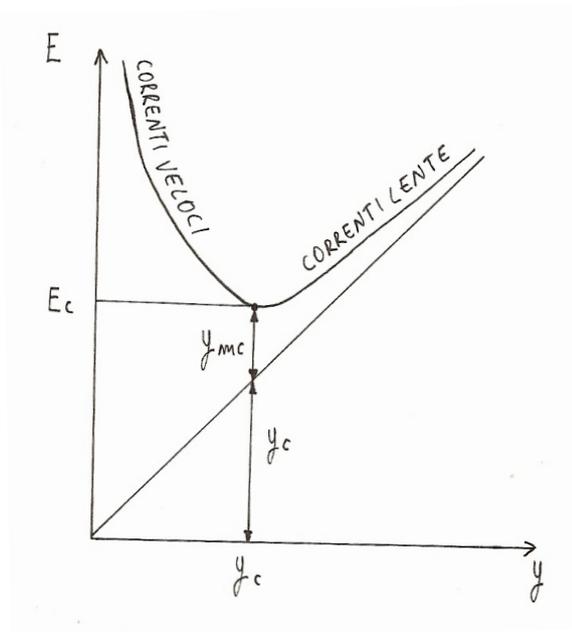


Figura 3.5: Correnti veloci e correnti lente.

### 3.2.2 Energia specifica assegnata

Tutte le considerazioni viste, ed in particolare quelle relative allo stato critico, possono essere anche riprese osservando i fatti da un altro punto di vista. Sempre assegnata la sezione trasversale prefissiamo il valore dell'*energia specifica*  $E$  della corrente, e studiamo come varia la portata  $Q$  al variare dell'altezza  $y$ .

I *limiti di variabilità* della  $y$  sono, in queste condizioni, lo zero e la stessa  $E$ , non potendo il carico piezometrico superare quello totale.

Conviene risolvere l'equazione 3.4 rispetto a  $Q$ :

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - y)} \quad (3.15)$$

La portata  $Q$  si annulla in due casi:

1.  $y = 0$ : si annulla l'area  $\Omega$ ;

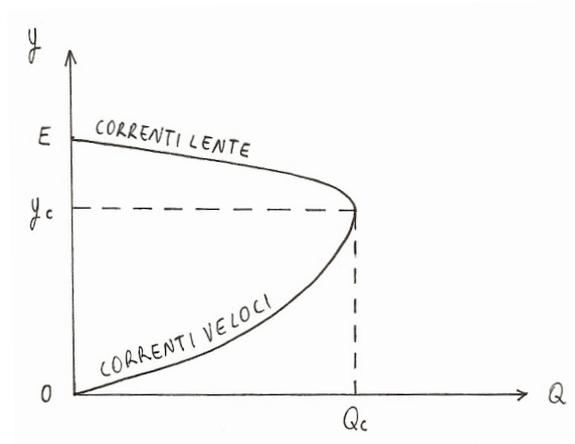


Figura 3.6: Andamento della portata  $Q$  in funzione della profondità  $y$  della corrente.

2.  $y = E$ : si annulla il carico cinetico e quindi la velocità.

Variando  $y$  tra questi due limiti, i valori della portata  $Q$  devono dunque passare per un *massimo*.

Imponendo la *condizione di massimo*:

$$\frac{dQ}{dy} = \sqrt{2g(E-y)} \cdot \frac{d\Omega}{dy} - \frac{g\Omega}{\sqrt{2g(E-y)}} = 0 \tag{3.16}$$

e moltiplicando ambo i membri per  $\sqrt{2g(E-y)}$  (che è non nullo in quanto sicuramente la soluzione non è  $y = E$ ) e ricordando che  $d\Omega/dy = B$ , si ottiene:

$$y = E - \frac{\Omega}{2B} = E - \frac{y_m}{2} \tag{3.17}$$

Ma si riconosce dalla 3.14 che questa condizione si ha proprio in corrispondenza dello *stato critico*; e si trova quindi che la portata massima compatibile con l'assegnata energia specifica  $E$  si ha proprio quando  $y = y_c$ .

Ne consegue una *seconda definizione* dell'altezza critica: dicesi *altezza critica* di una corrente di assegnata energia specifica  $E$  rispetto al fondo dell'alveo, quell'altezza a cui corrisponde il massimo valore della portata.

**Sezioni rettangolari**

Nel caso particolare di sezioni rettangolari ( $y_m = y$  e  $\Omega = By$ ), l'altezza critica vale:

$$y_c = E - \frac{y_c}{2} = \frac{2}{3}E \tag{3.18}$$

e il *valore massimo della portata*:

$$Q_{\max} = Q_c = By_c\sqrt{gy_c} = \frac{2}{3\sqrt{3}}BE\sqrt{2gE} \tag{3.19}$$

## Esempio di sezione trapezia

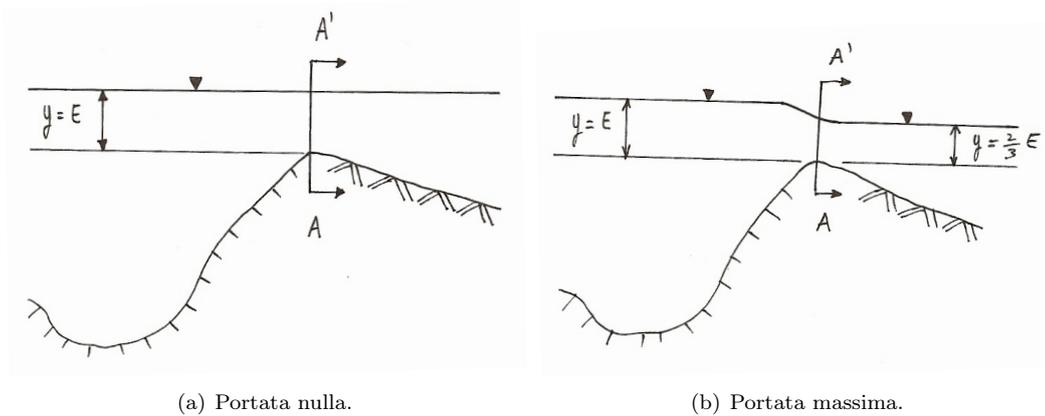


Figura 3.7: Esempio di energia specifica fissata.

Consideriamo un lago con all'interno dell'acqua ferma, dalla cui sponda esce un canale che si porta via dell'acqua. Si vuole valutare la portata in uscita nei casi in cui:

- il canale s'immette in un altro lago avente la stessa profondità riferita alla sezione dell'incile;
- il canale va verso valle senza nulla che faccia aumentare l'altezza della sezione.

Il canale è a sezione trapezia isoscele con  $B_0 = 5$  m ed  $m = 2$ , l'altezza della corrente nel lago è pari a  $y = E = 2$  m rispetto al livello zero definito dall'incile. Nel primo caso il livello energetico è

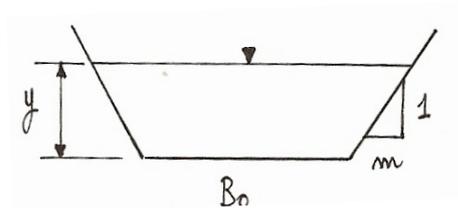


Figura 3.8: Sezione A-A'.

assegnato  $y = E$  ed è costante. La portata è quindi nulla.

Nel secondo caso la corrente si adatta alla profondità che preferisce, arriva quindi all'altezza critica:

$$y_c = E - \frac{y_{mc}}{2}$$

Sostituendo al posto di  $y_{mc}$  l'espressione dell'altezza media si ottiene un'equazione non lineare in  $y_c$  che può essere risolta, ad esempio, per tentativi:

$$y_c = E - \frac{1}{2} \cdot \frac{B_0 y_c + m y_c^2}{B_0 + 2 m y_c} = 1,45 \text{ m} \quad (3.20)$$

Una volta ricavata l'altezza critica  $y_c$  la portata si calcola mediante la relazione:

$$Q_c = \Omega \sqrt{2g(E - y_c)} = (B_0 y_c + m y_c^2) \sqrt{2g(E - y_c)} = 37,63, \text{ m}^3/\text{s}$$

### 3.3 Alvei a debole pendenza e a forte pendenza

Finora ci si è limitati all'esame delle relazioni esistenti tra l'altezza d'acqua, l'energia specifica e la portata per una assegnata sezione trasversale. Si vuole ora estendere l'osservazione ad un *tratto di alveo di lunghezza finita*, abbracciante la sezione stessa.

#### 3.3.1 Ipotesi di moto uniforme

Viene formulata l'ipotesi che la corrente si muova di moto uniforme, ossia un moto in cui le *condizioni idrauliche* che si trovano in una sezione sono le stesse di quelle che si trovano in qualsiasi altra. Affinché ciò avvenga la *forma della sezione* deve essere sempre uguale e la *pendenza del fondo* deve essere costante, quindi il canale deve essere di tipo *prismatico* o *cilindrico*.

#### Caratterizzazione idraulica del moto uniforme

In condizioni di moto uniforme la velocità media  $V$  è legata alle caratteristiche dell'alveo (pendenza, scabrezza, forma della sezione trasversale) e della corrente (profondità, area bagnata, raggio idraulico) dalla *legge del moto uniforme*, che di norma si esprime attraverso la *legge di Chézy*:

$$V_0 = \chi \sqrt{R \cdot i_f} \tag{3.21}$$

dove:

- $\chi$ : *indice di scabrezza* avente le dimensioni della radice di una accelerazione [ $L^{1/2}T^{-1}$ ], ne consegue che i coefficienti che compaiono nelle formule che la definiscono hanno un valore che dipende dal sistema di riferimento adottato;
- $i_f$ : pendenza del fondo (al posto della cadente  $J$ );
- $R$ : raggio idraulico, nel caso di *sezione trasversale rettangolare*:

$$R = \frac{\Omega}{P} = \frac{By}{B + 2y} = \frac{y}{1 + 2y/B} \tag{3.22}$$

La relazione di Chézy può anche essere scritta con l'indice di scabrezza in *forma adimensionale*:

$$V_0 = C \sqrt{g \cdot R \cdot i_f} \tag{3.23}$$

- $C$ : *indice di scabrezza adimensionale*.

La definizione del coefficiente  $C$  avviene per mezzo di formule empiriche (Bazin, Kutter, Strickler, ...), che lo pongono in relazione con un altro indice di scabrezza e con il raggio idraulico, formule valide per le situazioni di *moto puramente turbolento* (come è quello nei canali).

#### 3.3.2 Pendenza critica per sezioni rettangolari larghe

Consideriamo il caso semplice della sezione rettangolare molto larga, per il quale, essendo  $B \gg y$  allora si può porre  $R \approx y$ . Si vuole calcolare in questo caso il valore della pendenza critica  $i_c$ .

La relazione di Chézy può essere scritta in termini di portata unitaria:

$$q = V_0 \cdot y = yC \sqrt{gyi_f} \tag{3.24}$$

da questa è possibile ricavare la *profondità del moto uniforme*:

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{gC^2i_f}} \tag{3.25}$$

ed uguagliandola all'altezza critica fornita dalla 3.11 si ricava il *valore della pendenza critica*:

$$i_c = \frac{1}{C^2} \tag{3.26}$$

Si presentano due possibilità:

- $i_f < i_c$ : alvei a debole pendenza ( $y_0 > y_c$ )  $\longrightarrow$  correnti uniformi lente ( $V_0 < V_c$ );
- $i_f > i_c$ : alvei a forte pendenza ( $y_0 < y_c$ )  $\longrightarrow$  correnti uniformi veloci ( $V_0 > V_c$ ).

Si noti come la pendenza critica dipenda dalla portata ed in particolare diminuisca al crescere di essa. Per rendere evidente questo fatto si consideri la formula del moto uniforme di *Gauckler-Strickler*<sup>1</sup>, ossia la formula di Chézy con indice di scabrezza calcolato secondo Gauckler e Strickler:

$$V_0 = K_s R^{2/3} i_f^{1/2} \quad (3.27)$$

Confrontandola, mediante rapporto con la formula di Chézy con coefficiente di scabrezza adimensionale, si ottiene l'espressione dell'indice di scabrezza secondo Gauckler e Strickler:

$$1 = \frac{C\sqrt{gR}}{K_s R^{2/3}} \implies C = \frac{K_s R^{2/3}}{\sqrt{g}} R^{-1/2} = \frac{K_s}{\sqrt{g}} R^{1/6} \quad (3.28)$$

Se la portata è piccola il raggio idraulico è piccolo, per la relazione 3.28 il coefficiente adimensionale di Chézy è anch'esso piccolo e quindi  $i_c$  è grande. Ciò significa che un alveo di assegnata pendenza  $i_f$  può essere a debole pendenza (corrente lenta) per piccole portate e a forte pendenza (corrente veloce) per portate maggiori.

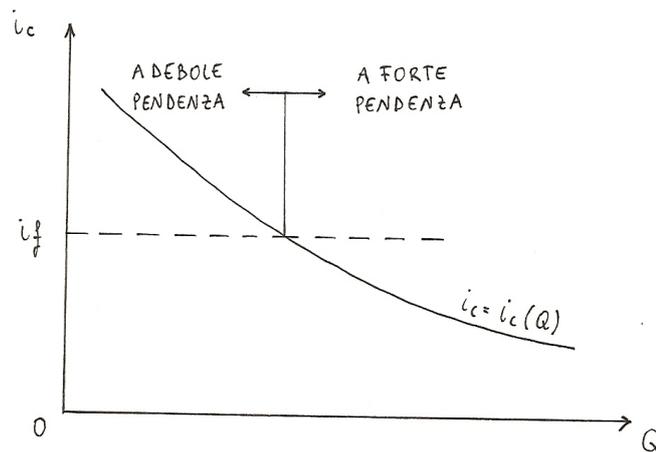


Figura 3.9: Relazione tra pendenza critica e portata.

Considerando un campo di variabilità di  $C$  tra 7 e 20 si ottengono valori della pendenza critica dell'ordine di  $10^{-2}$  e quindi nelle situazioni pratiche si devono considerare sia alvei a forte che a debole pendenza.

<sup>1</sup>Del tutto identica alla formula di Gauckler-Strickler è la *formula di Manning*, la più diffusa fra i tecnici anglo-americani: sola differenza è che in luogo di  $K_s$  vi compare il suo inverso  $K_s = 1/n$ , i cui valori, almeno nell'originaria tabellazione, erano riferiti al sistema di misura inglese.

### 3.4 Carattere cinematico dei due tipi di corrente

Lo stato critico delle correnti a pelo libero è stato individuato sulla base di *considerazioni energetiche*. La distinzione fra correnti lente e correnti veloci non è tuttavia una semplice *definizione analitica*, bensì è proprio la *diversità di comportamento fisico* dei due tipi di correnti che è tale da giustificare la distinzione.

La differenza sta soprattutto nelle modalità con cui si propagano le *perturbazioni di livello*: si riconosce che la *celerità di propagazione* delle piccole perturbazioni è superiore alla *velocità del movimento* nelle correnti lente, inferiore invece nelle correnti veloci.

#### 3.4.1 Celerità di propagazione delle perturbazioni di livello

Si abbia una corrente in un alveo rettangolare, supponiamo il moto uniforme (ipotesi comunque non necessaria) di altezza  $y_0$  e velocità media  $V_0$ . Ad esso si sovrapponga un'onda positiva di altezza  $\delta$ , sicché dopo il passaggio del suo fronte l'altezza risulti  $y_1 = y_0 + \delta$ .

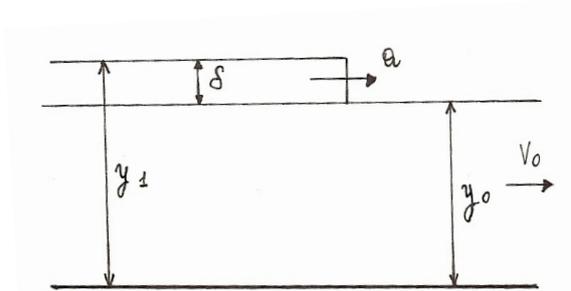


Figura 3.10: Propagazione di una perturbazione di livello.

Si definisce *celerità assoluta*  $a$  della perturbazione la velocità con cui il fronte d'onda avanza rispetto all'alveo fisso; si definisce *celerità relativa*  $c = a - V_0$  la velocità con cui la perturbazione si propaga rispetto alla corrente di base, di velocità  $V_0$ .

Si può facilmente dimostrare che, se si considera un  $\delta$  infinitesimo, vale la seguente *espressione di Lagrange*:

$$c = \pm \sqrt{gy} \quad (3.29)$$

Confrontiamo ora il valore della *celerità*  $c$  trovata per le perturbazioni infinitesime con quello della *velocità iniziale*  $V$  della corrente.

#### Correnti lente

Se la corrente è lenta la velocità  $V$  è, per definizione, inferiore alla velocità critica, mentre l'altezza  $y$  è maggiore dell'altezza critica  $y_c$ . Confrontando l'espressione di Lagrange per  $c$  con la 3.12 si ha che:

$$V < \sqrt{gy_c} < \sqrt{gy} = |c| \quad (3.30)$$

La celerità di propagazione delle piccole perturbazioni in una corrente lenta è maggiore della velocità della corrente.

Ne consegue che le piccole perturbazioni provocate in una corrente lenta possono non solo propagarsi lungo l'alveo verso valle, con celerità assoluta  $a = V + \sqrt{gy} > 0$ , ma anche verso monte, con celerità assoluta  $a = V - \sqrt{gy} < 0$ .

*Immergendo verticalmente un bastone* in una corrente lenta si forma attorno al punto di immersione un'onda circolare che si espande sempre circolarmente ma contemporaneamente il suo centro si sposta verso valle con la corrente, ossia con velocità  $V$ : il fronte d'onda riesce però a propagarsi anche verso monte, seppur con celerità minore che verso valle.

### Correnti veloci

Se la corrente è veloce la velocità  $V$  è, per definizione, superiore alla velocità critica, mentre l'altezza  $y$  è minore dell'altezza critica  $y_c$ . Confrontando l'espressione di Lagrange per  $c$  con la 3.12 si ha che:

$$V > \sqrt{gy_c} > \sqrt{gy} = |c| \quad (3.31)$$

La celerità di propagazione delle piccole perturbazioni in una corrente veloce è minore della velocità della corrente.

Ne consegue che le piccole perturbazioni provocate in una corrente veloce non possono che propagarsi verso valle, in quanto anche quelle che rimontano la corrente con celerità relativa  $c = -\sqrt{gy}$  presentano rispetto all'alveo una celerità assoluta  $a = V - \sqrt{gy} > 0$ , e si propagano quindi verso valle.

*Immergendo verticalmente un bastone* in una corrente veloce la velocità con cui il centro dell'onda circolare segue la corrente è superiore alla celerità  $c$ , e quindi anche il fronte dell'onda diretto contro corrente è costretto a spostarsi verso valle. Ne derivano, per involuppo delle successive posizioni assunte dall'onda circolare, due *fronti d'onda* rettilinei.

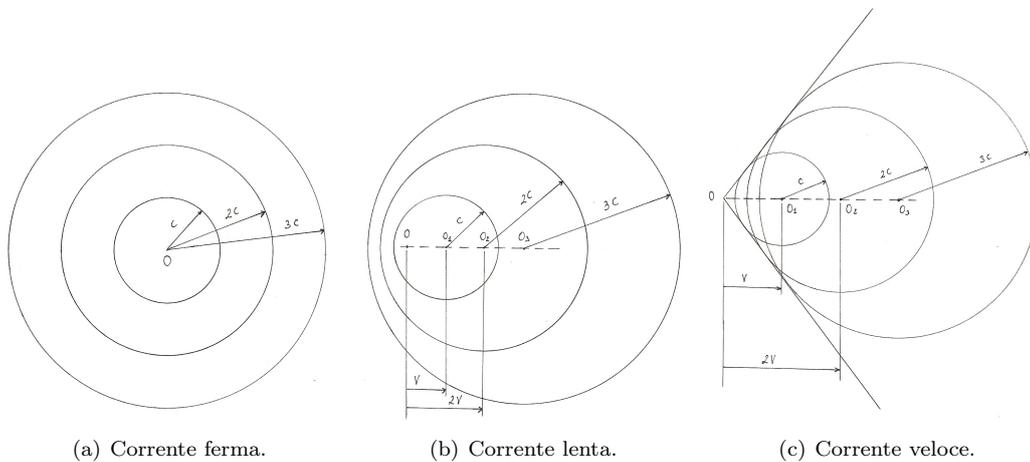


Figura 3.11: Propagazione di piccole perturbazioni.

### 3.4.2 Numero di Froude

Le osservazioni appena fatte possono essere a base di un facile criterio pratico distintivo dei due tipi di corrente.

Si definisce *numero di Froude* il rapporto tra la velocità della corrente e la celerità delle piccole perturbazioni:

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gy}} \quad (3.32)$$

- $Fr < 1$ : correnti lente;
- $Fr > 1$ : correnti veloci;
- $Fr = 1$ : stato critico.

Si noti come quanto dimostrato per gli alvei rettangolari sia valido anche per gli *alvei con sezione trasversale di forma qualsiasi*, sostituendo alla  $y$  l'altezza media  $y_m$  e ricordando che per essi la velocità critica vale  $\sqrt{gy_{mc}}$ .

Dal momento che il tipo di corrente costituisce la *condizione al contorno* per la valutazione dei *profili di moto permanente*, in quanto, come si vedrà nel seguito, nel caso di corrente lenta la condizione è determinata dal livello di valle mentre nel caso di corrente veloce la condizione è determinata dal livello di monte, ne deriva che nei due casi si hanno dei profili di aspetto totalmente diverso.

### 3.5 Correnti in moto permanente. Profili del pelo libero

Consideriamo una corrente in *moto permanente* con le sole condizioni che la *pendenza sia piccola* e le *variazioni di sezione piuttosto gradual*i, sicché la corrente stessa possa considerarsi lineare.

La *condizione di moto permanente* equivale a considerare nulle tutte le variazioni rispetto al tempo (ossia  $\partial/\partial t = 0$ ). Tuttavia se tali variazioni sono molte lente (ossia  $\partial/\partial t \approx 0$ ) è possibile comunque analizzare approssimativamente il moto come una *successione di moti permanenti*.

Le *caratteristiche geometriche* possono essere invece funzione dello spazio (ossia  $y = y(x)$ ) così come quelle *dinamiche* (ossia  $V = V(x)$ ,  $Q = Q(x)$ ).

#### Principio di conservazione della massa

Isoliamo un tronco di alveo di lunghezza  $\Delta x$  compreso tra le sezioni 1 e 2.

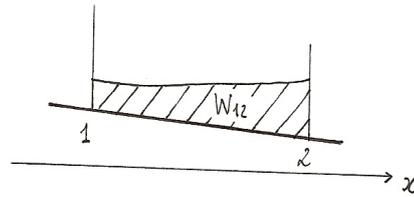


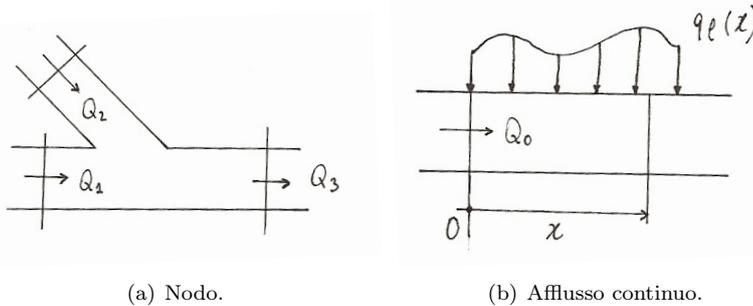
Figura 3.12: Tronco di alveo.

Applicando il principio di conservazione della massa o principio di continuità si ha che:

$$\frac{dW_{12}}{dt} = Q_1 - Q_2 \tag{3.33}$$

Poiché si è in condizioni di moto permanente il termine a sinistra della relazione 3.33 è nullo e deve quindi essere:

$$Q_1 = Q_2 \implies Q = \text{cost} \tag{3.34}$$



(a) Nodo.

(b) Afflusso continuo.

Figura 3.13: Variazioni di portata.

L'unico caso in cui si può avere una variazione di portata tra le due sezioni 1 e 2 si ha in presenza di afflussi o deflussi nel tratto considerato. Esistono due tipi di afflussi/deflussi:

1. *nodo*:

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \tag{3.35}$$

2. *afflusso/deflusso continuo*:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q_l(\eta) d\eta \tag{3.36}$$

L'andamento della portata sezione per sezione è quindi noto in ogni caso.

### Principio di conservazione dell'energia

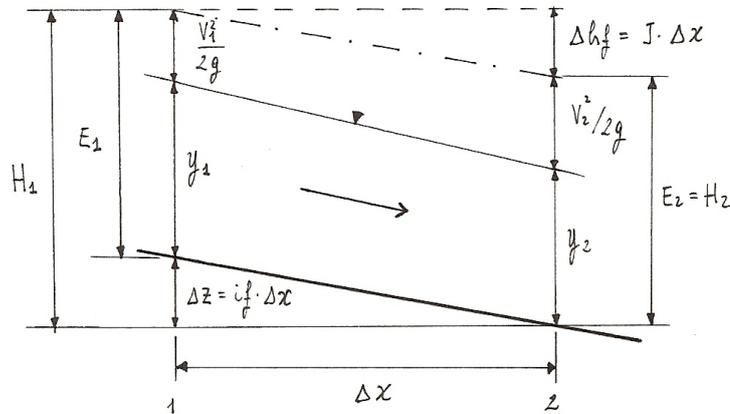


Figura 3.14: Applicazione del principio di conservazione dell'energia.

Lungo il tronco isolato l'*abbassamento del fondo* vale (nell'ipotesi che la pendenza sia piccola):

$$\Delta z = i_f \cdot \Delta x \quad (3.37)$$

l'*abbassamento della linea dei carichi totali* vale:

$$\Delta h_f = J \cdot \Delta x \quad (3.38)$$

essendo  $J$  la *cadente*, ossia la perdita di carico per unità di lunghezza.

Il pelo dell'acqua, ossia la *linea piezometrica*, potrà essere discendente o ascendente nel senso del moto, anche rispetto all'orizzontale.

Applicando il principio di conservazione dell'energia tra le sezioni 1 e 2 si ha quindi:

$$H_1 = H_2 + \Delta h_f \implies \underbrace{\Delta z + y_1 + \frac{V_1^2}{2g}}_{E_1} = \underbrace{y_2 + \frac{V_2^2}{2g}}_{E_2} + \Delta h_f \quad (3.39)$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{E_2 - E_1}{\Delta x} = i_f - J \quad (3.40)$$

#### 3.5.1 Equazione differenziale del profilo del pelo libero

Se la lunghezza del tronco di alveo isolato tende a zero ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) allora si ottiene l'equazione differenziale del profilo del pelo libero di una corrente gradualmente variata in moto permanente:

$$\frac{dE}{dx} = i_f - J \quad (3.41)$$

Con questa equazione si esprime il fatto che l'energia specifica totale rispetto al fondo aumenta per l'abbassamento del fondo stesso e diminuisce per effetto delle resistenze.

Tenuta presente la definizione di  $E$  è possibile scrivere:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{d\Omega}{dx} = i_f - J \quad (3.42)$$

Sempre per un alveo del tutto generico, l'area  $\Omega$  della sezione bagnata può variare non soltanto perchè varia  $y$  ma anche con la  $x$  possono variare forma e le dimensioni della sezione trasversale, quindi considerando che  $\Omega = \Omega(x, y(x))$  si ha:

$$\frac{d\Omega}{dx} = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right|_{y=\text{cost}} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right|_{y=\text{cost}} + B \frac{dy}{dx} \quad (3.43)$$

La *forma più generale* dell'equazione differenziale del profilo del pelo libero di una corrente gradualmente variata in moto permanente con portata costante risulta quindi:

$$\frac{dy}{dx} \left( 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} B \right) - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{\partial \Omega}{\partial x} = i_f - J \quad (3.44)$$

Tale equazione risulta integrabile per qualsiasi tipo di alveo solamente con *metodi numerici* (metodi spettrali, metodi alle differenze).

Si noti come  $\Omega$  e  $B$  siano funzione nota di  $x$  e  $y$ . Nel caso particolare che l'alveo sia cilindrico si annulla l'ultimo addendo del primo membro e sia  $\Omega$  che  $B$  restano funzioni note della sola  $y$ .

### Alvei cilindrici

Si vuole ora trarre dalla 3.41 indicazioni qualitative circa l'andamento dei possibili profili di moto permanente nel caso di alvei cilindrici, per cui la  $E$  risulta funzione di  $x$  per il tramite della sola  $y$ , ossia  $E = E(y(x))$ ; si ha quindi:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dy} \frac{dy}{dx} \quad (3.45)$$

Si trae dalla 3.41:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i_f - J}{\frac{dE}{dy}} \quad (3.46)$$

Studiando il segno della funzione fratta è possibile valutare l'andamento della profondità della corrente in funzione di  $x$  e quindi, di fatto, il profilo del pelo libero.

Per quanto riguarda il *denominatore* si è già visto che:

- $y < y_c$  (correnti veloci):  $dE/dy < 0$ ;
- $y > y_c$  (correnti lente):  $dE/dy > 0$ ;
- $y = y_c$  (correnti critiche):  $dE/dy = 0$ .

Per quanto riguarda il *numeratore* esso si annulla in condizioni di moto uniforme, in quanto in questo caso la linea dei carichi totali risulta parallela al fondo ( $i_f = J$ ) e si ha di conseguenza  $dy/dx = 0$ , che è appunto la definizione di moto uniforme. Accettando poi per la perdita di carico unitaria l'espressione:

$$J = \frac{V^2}{C^2 g R} = \frac{Q^2}{C^2 g R \Omega^2} \quad (3.47)$$

si riconosce che essa è tanto più piccola quanto maggiore è  $y$  (con  $y$  crescono tutti i fattori del denominatore) e quindi:

- $y < y_0$ :  $i_f - J < 0$ ;
- $y > y_0$ :  $i_f - J > 0$ ;
- $y = y_0$ :  $i_f - J = 0$ .

Conviene ora studiare separatamente quel che può avvenire negli alvei a debole e forte pendenza.

### 3.5.2 Alvei a debole pendenza

Assegnata la portata è possibile ricavare l'altezza del moto uniforme  $y_0$  dalla relazione di Chézy (relazione 3.25 per sezioni rettangolari larghe) e l'altezza critica  $y_c$  dalla relazione 3.7 (relazione 3.11 nel caso di sezioni rettangolari larghe), si troverà  $y_0 > y_c$ .

Tracciamo allora due rette parallele al fondo e distanti da esso rispettivamente  $y_c$  e  $y_0$  (quest'ultima corrisponde al profilo del moto uniforme). Queste due rette ed il fondo dell'alveo delimitano 3 zone, entro ognuna delle quali può svilupparsi un profilo di moto permanente.

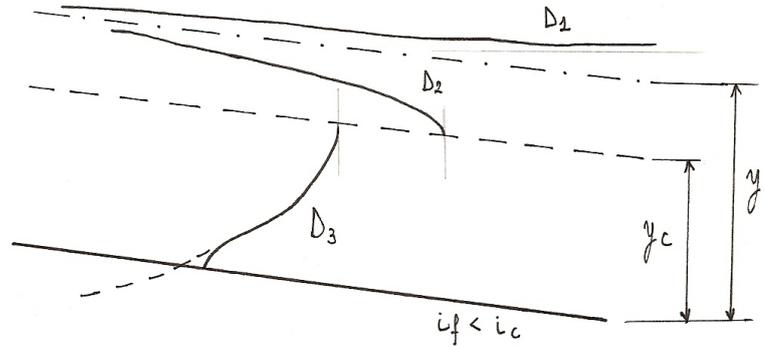


Figura 3.15: Profili del pelo libero: alvei a debole pendenza.

#### Profilo D1 - profilo di rigurgito

Per  $y > y_0 > y_c$  si ha una corrente lenta con altezza superiore a quella del moto uniforme. Sia il numeratore che il denominatore della 3.41 sono positivi e quindi  $dy/dx > 0$ , il che significa che la corrente è *ritardata*.

Se ci si spinge *verso monte* si trovano valori di  $y$  decrescenti e quindi sempre più prossimi ad  $y_0$ ; anche la pendenza del profilo tende a  $i_f$ : il moto uniforme viene raggiunto asintoticamente verso monte.

Se ci si spinge *verso valle* si trovano valori di  $y$  crescenti e, teoricamente, possono tendere all'infinito; la resistenza tende con ciò ad annullarsi ed il numeratore del secondo membro della 3.41 tende ad  $i_f$ ; il denominatore invece tende all'unità come si riconosce dal fatto che la  $E(y)$  ha un asintoto nella bisettrice del primo quadrante:  $dy/dx$  tende a  $i_f$ , il che significa che il profilo tende a *disporsi orizzontalmente*, in quanto il pelo dell'acqua si solleva rispetto al fondo di altrettanto di quanto il fondo si abbassa rispetto all'orizzontale.

#### Profilo D2 - profilo di richiamo

Per  $y_0 > y > y_c$  si ha una corrente lenta con altezza inferiore a quella del moto uniforme. Il numeratore della 3.41 risulta negativo mentre il denominatore risulta positivo e quindi  $dy/dx < 0$ , il che significa che la corrente è *accelerata*.

Se ci si spinge *verso monte* si trovano valori di  $y$  crescenti e quindi tendenti ad  $y_0$ , valore che viene raggiunto in via asintotica.

Se ci si spinge *verso valle* si trovano valori di  $y$  decrescenti e quindi tendenti a  $y_c$  e il profilo raggiunge lo stato critico con tangente verticale.

#### Profilo D3

Per  $y_0 > y_c > y$  la corrente risulta veloce: si è di fronte ad una corrente veloce in un alveo a debole pendenza. Sia il numeratore che il denominatore della 3.41 sono negativi e quindi  $dy/dx > 0$ , il che significa che la corrente è *ritardata*.

Se ci si spinge *verso valle* le altezze  $y$  crescono e tendono a  $y_c$ , altezza che il profilo teorico raggiungerebbe con tangente verticale: il profilo è quindi ascendente non solo rispetto al fondo ma anche rispetto all'orizzontale.

Se ci si spinge *verso monte* le altezze  $y$  decrescono: il profilo teorico, dopo aver tagliato il fondo dell'alveo, presenterebbe valori di  $y$  negativi, privi ovviamente di significato fisico: con ragionamento analogo a quello svolto per il profilo D1 si riconoscerebbe l'esistenza di un asintoto orizzontale.

Per riconoscere l'effettivo andamento del profilo *in prossimità del fondo*, occorre nella 3.41 esplicitare la  $J$ . Supponendo per semplicità l'alveo rettangolare molto largo ( $R \approx y$ ), adottando l'espressione di Gauckler-Strickler per il coefficiente  $C$ :

$$J = \frac{q^2}{C^2 y^3 g} = \frac{q^2}{K_s^2 y^{10/3}} \tag{3.48}$$

ricordando inoltre che:

$$\frac{dE}{dy} = 1 - \frac{q^2}{gy^3}$$

risulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i_f - \frac{q^2}{K_s^2 y^{10/3}}}{1 - \frac{q^2}{gy^3}}$$

Per  $y$  tendente a zero il numeratore è infinito di ordine  $10/3$ , mentre il denominatore è infinito di ordine  $3$ ; la frazione tende quindi all'infinito, ed il *profilo si dispone verticale*.

### 3.5.3 Alvei a forte pendenza

Per un'assegnata portata l'altezza del moto uniforme risulta inferiore all'altezza critica:  $y_0 < y_c$ .

Si tracciano le rette  $y = y_0$  (profilo del moto uniforme) e  $y = y_c$ , che delimitano, col fondo dell'alveo, 3 zone, entro ciascuna delle quali può svolgersi un profilo di moto permanente.

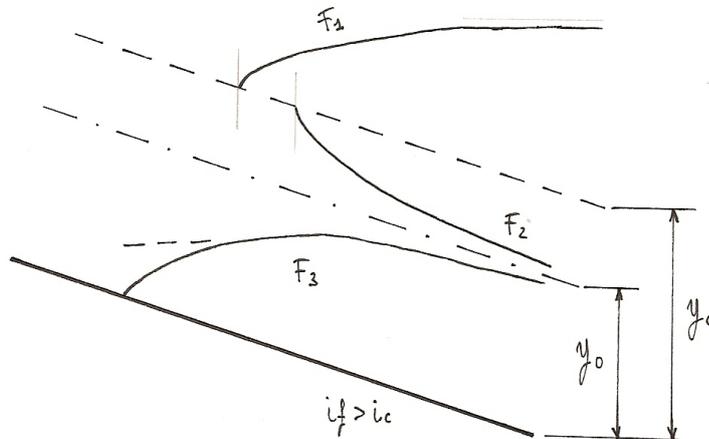


Figura 3.16: Profili del pelo libero: alvei a forte pendenza.

#### Profilo F1

Per  $y > y_c > y_0$  si ha una *corrente lenta*, la sola corrente lenta possibile in alveo a debole pendenza. Sia il numeratore che il denominatore della 3.41 sono positivi e quindi si ha  $dy/dx > 0$ .

Se ci si spinge *verso monte* si trovano valori decrescenti delle  $y$ , che tendono al valore critico  $y_c$ , il quale viene raggiunto con *tangente verticale*: il profilo risulta dunque *ascendente rispetto al fondo*.

Se ci si spinge *verso valle*, per profondità crescenti teoricamente fino all'infinito, una ragionamento identico a quello svolto per il profilo D1 porta a riconoscere l'esistenza di un *asintoto orizzontale*.

### Profilo F2

Per  $y_c > y > y_0$  si ha una corrente veloce, con altezza maggiore di quella del moto uniforme. Il numeratore della 3.41 ha il numeratore positivo ma il denominatore negativo e quindi  $dy/dx < 0$  ed il moto risulta *accelerato*.

Se ci si spinge *verso monte* le  $y$  tendono a  $y_c$  che il profilo raggiunge con *tangente verticale*.

Se ci si spinge *verso valle* le  $y$  decrescono e tendono a  $y_0$  mentre la pendenza del profilo tende a  $i_f$  ( $dy/dx \rightarrow 0$ ); il moto uniforme viene ripristinato asintoticamente verso valle.

### Profilo F3

Per  $y_c > y_0 > y$  la corrente è ancora veloce e la sua altezza è inferiore a quella del moto uniforme. Numeratore e denominatore della 3.41 sono entrambi negativi e quindi  $dy/dx > 0$ : moto *ritardato*.

Se ci si spinge *verso valle* per  $y$  crescenti si tende asintoticamente al moto uniforme; la pendenza del profilo tende pure a quella del moto uniforme, sicché il profilo, pur riguardando una corrente ritardata risulta discendente rispetto all'orizzontale.

Si ci si spinge *verso monte* il profilo teorico, dopo aver attraversato il fondo, presenterebbe valori di  $y$  negativi, crescenti in valore assoluto, e col solito ragionamento si riconoscerebbe una tendenza ad un asintoto orizzontale.

## 3.5.4 Osservazioni generali

Dal confronto dei 6 profili di moto permanente è possibile trarre qualche conclusione di carattere generale.

- Alvei a *debole pendenza*: il moto uniforme, che è di corrente lenta, viene sempre raggiunto asintoticamente verso monte.  
Infatti una *perturbazione* (scostamento dal moto uniforme), originata in una sezione qualsiasi di una corrente lenta, può risalire lungo l'alveo fino all'infinito a monte.
- Alvei a *forte pendenza*: il moto uniforme, che è di corrente veloce, viene raggiunto asintoticamente verso valle.  
Infatti una *perturbazione*, originata in una sezione qualsiasi di una corrente veloce, non può che propagarsi verso valle.
- Allo *stato critico* si tende *sempre*:
  - verso valle: alvei a debole pendenza;
  - verso monte: alvei a forte pendenza.
- Dei 6 profili 4 corrispondono a correnti ritardate, mentre 2 a correnti accelerate (questi ultimi si svolgono nell'intervallo di altezze comprese fra quella critica e quella del moto uniforme, indipendentemente dalla pendenza dell'alveo).

## 3.5.5 Tracciamento quantitativo dei profili di moto permanente

Si è visto come i profili di moto permanente siano analiticamente rappresentabili a mezzo di una ODE del I ordine. Per poterla risolvere è necessario definire una condizione al contorno: si impone la condizione che in una determinata sezione  $x^*$  si abbia una determinata altezza  $y^*$ :

$$y(x^*) = y^* \tag{3.49}$$

Tale condizione va ricercata in corrispondenza della *causa perturbatrice*, che provoca, in una certa sezione, un'altezza  $y$  diversa da quella di moto uniforme: tale altezza andrà stabilita in base *al modo di agire* della causa perturbatrice. Si noti come la causa perturbatrice possa esercitare la propria *influenza*:

- *verso monte* soltanto se la corrente è *lenta* (o diventa lenta per causa sua): se la corrente è veloce infatti le perturbazioni si propagano con celerità relativa inferiore alla velocità della corrente e quindi non possono risalire l'alveo;

- verso valle soltanto se la corrente è *veloce* (o diventa veloce per causa sua): si può dimostrare per assurdo.

Sulla base di queste considerazioni si può affermare che la condizione al contorno per la precisazione dell'integrale particolare dell'equazione del profilo, e quindi il *punto di partenza* per il materiale tracciamento del profilo stesso, va ricercata:

→ all'estremo a *valle* se la corrente è *lenta*;

→ all'estremo a *monte* se la corrente è *veloce*.

In questa sezione estrema dovrà quindi ritenersi nota l'altezza  $y^*$  determinata dalla causa perturbatrice e quindi sarà noto anche il dislivello  $y^* - y_0$  rispetto al moto uniforme.

**Metodo alle differenze finite**

Per il tracciamento per punti del profilo di moto permanente conviene scrivere l'equazione differenziale del profilo del pelo libero sostituendo incrementi finiti ai differenziali:

$$\Delta x = \frac{\Delta E}{i_f - J} \tag{3.50}$$

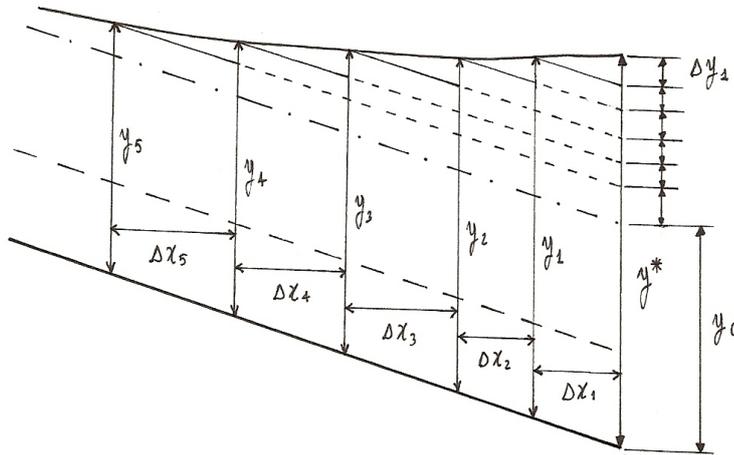


Figura 3.17: Metodo alle differenze finite per il tracciamento dei profili di moto permanente.

1. Si suddivide l'altezza del rigurgito  $y^* - y_0$  in un sufficiente numero di parti  $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$  (non necessariamente uguali, anzi col criterio di adattare la fittezza della suddivisione all'andamento del profilo cercato, che almeno qualitativamente è noto a priori).
2. Per ciascuna delle altezze  $y_i$  estreme dei singoli intervalli  $\Delta y_i$  si possono calcolare a mezzo della 3.4 (o dedurre dal grafico della curva dell'energia specifica) le corrispondenti energie specifiche  $E_i$ ; quindi le differenze  $\Delta E_i$  spettanti a ciascun intervallo, a partire dal più vicino alla causa perturbatrice.
3. Mentre la  $i_f$  è nota, la cadente  $\bar{J}_i$  da attribuire al singolo intervallo viene determinata adottando la formula di Gauckler-Strickler (relazione 3.48 nel caso di sezioni rettangolari larghe) e facendo la media aritmetica delle  $J$  riferite agli estremi dell'intervallo.
4. Mediante la 3.50 si calcola la differenza  $\Delta x_i$ , cioè la lunghezza del tronco di corrente lungo la quale l'altezza varia di  $\Delta y_i$ .

Si noti come questo procedimento, pur essendo stato esposto con implicito riferimento agli alvei cilindrici (i soli per i quali si possa parlare di moto uniforme), sia *valido in generale*. Per un esempio numerico si veda l'esercizio 3.14.1.

### 3.6 Passaggio attraverso lo stato critico. Il risalto

Per semplicità consideriamo solamente il caso di *alvei cilindrici*, formati da *tratti a pendenza costante*.

Ci si chiede se è possibile il *passaggio graduale*, cioè con *profilo continuo*, attraverso lo stato critico e in caso affermativo in quali circostanze esso possa avvenire.

#### 3.6.1 Passaggio da corrente lenta a corrente veloce

Una corrente che da lenta tenda a diventare veloce dovrà essere *accelerata*, in modo da raggiungere lo stato critico verso valle con altezze via via decrescenti: il solo profilo di corrente lenta che possa soddisfare questo requisito è il D2.

Superato lo stato critico, la corrente, ormai veloce, dovrà ancora essere accelerata e tendere verso valle al moto uniforme: il solo profilo di corrente veloce che possa soddisfare questo requisito è l'F2.

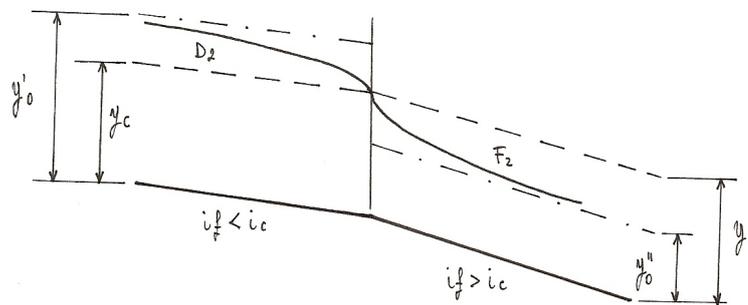


Figura 3.18: Passaggio attraverso lo stato critico: da corrente lenta a corrente veloce.

#### Cambiamento di pendenza dell'alveo

Affinchè ci sia il passaggio graduale di una corrente da lenta a veloce è dunque *necessario* un *cambiamento di pendenza* nell'alveo, da debole a forte.

Tale condizione è tuttavia *sufficiente*: quando l'alveo presenta un simile cambiamento di pendenza e *non esistano* lungo di esso altre cause perturbatrici, il passaggio graduale descritto avviene sempre, perchè avviene *spontaneamente*. La *causa perturbatrice* infatti, rappresentata appunto dal cambiamento di pendenza, è situata all'estremo *a valle della corrente lenta* e a quello *a monte della corrente veloce*, sicché su entrambe può esercitare la propria influenza, che si estende fino all'infinito.

Proprio in corrispondenza della sezione dove avviene il cambiamento di pendenza si stabilisce l'*altezza critica*  $y_c$ .

#### 3.6.2 Passaggio da corrente veloce a corrente lenta

Consideriamo il caso di una corrente veloce che tenda a diventare lenta.

Essa deve essere *ritardata* in modo da raggiungere verso valle lo stato critico per altezze crescenti: il solo profilo di corrente veloce che soddisfa questo requisito è il D3, che si svolge in *alveo a debole pendenza*.

Superato lo stato critico, la corrente, ormai lenta, deve ancora essere ritardata in modo da allontanarsi dallo stato critico stesso: il solo profilo che soddisfa questo requisito è l'F1, che si svolge in *alveo a forte pendenza*.

#### Cambiamento di pendenza dell'alveo

*Condizione necessaria* per il ricercato passaggio graduale attraverso lo stato critico è un cambiamento di pendenza da debole a forte.

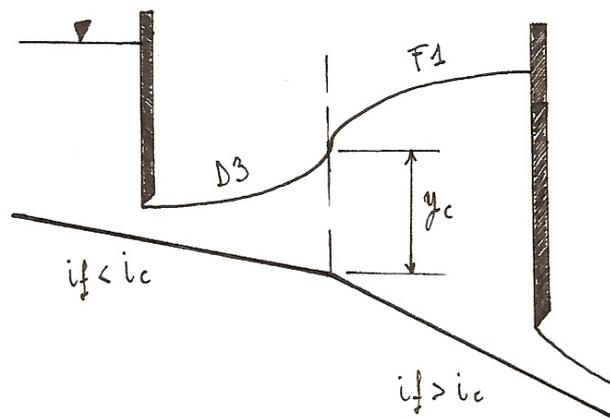


Figura 3.19: Passaggio attraverso lo stato critico: da corrente veloce a corrente lenta.

Questa volta però tale condizione *non è sufficiente*: il cambiamento di pendenza, a valle della corrente veloce e a monte della corrente lenta, non può esercitare alcuna influenza né sull'una né sull'altra.

La *corrente veloce* deve essere provocata (nell'alveo a debole pendenza) e condizionata nel suo svolgimento da una *causa situata a monte*, ad esempio una *paratoia* che obbliga la corrente a passare attraverso una luce battente ad essa soggiacente.

Viceversa la *corrente lenta* deve essere provocata (nell'alveo a forte pendenza) e condizionata nel suo svolgimento da una causa situata a valle, ad esempio un'altra *paratoia*.

È evidente che le due paratoie devono proprio essere regolate in modo che i due profili di moto permanente da esse provocati raggiungano l'*altezza critica* nella sezione dove ha luogo il *cambiamento di pendenza*; se si varia di poco l'apertura anche solo di una delle due l'altezza critica viene raggiunta in una sezione diversa da quella del cambiamento di pendenza e quindi non si può realizzare il passaggio graduale attraverso lo stato critico.

Il *passaggio graduale* di una corrente da veloce a lenta è *possibile teoricamente ma con probabilità nulla*, perchè subordinato al verificarsi contemporaneo di due circostanze entrambe con probabilità nulla.

### Risalto idraulico

Il passaggio di una corrente dallo stato veloce a quello lento avviene quindi attraverso una *discontinuità*, un brusco sollevamento del pelo libero, detto *risalto idraulico* o *salto di Bidone*.

Questo brusco sollevamento nella sua manifestazione più tipica è accompagnato dalla formazione di un *imponente vortice superficiale* ad asse orizzontale, che assorbe aria presentandosi schiumeggiante, e *dissipa* rilevanti quantità di energia.

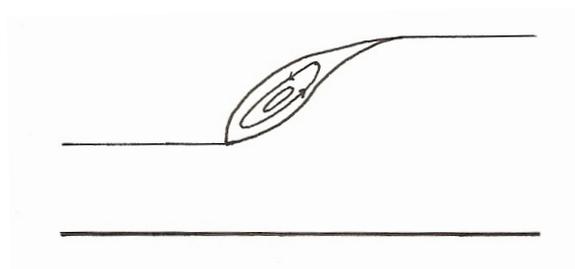


Figura 3.20: Risalto idraulico.

### Interpretazione teorica

L'interpretazione teorica del fenomeno è possibile da ottenere applicando l'*equazione globale dell'equilibrio dinamico* (conservazione della quantità di moto) al breve tronco di corrente che comprende il vortice.

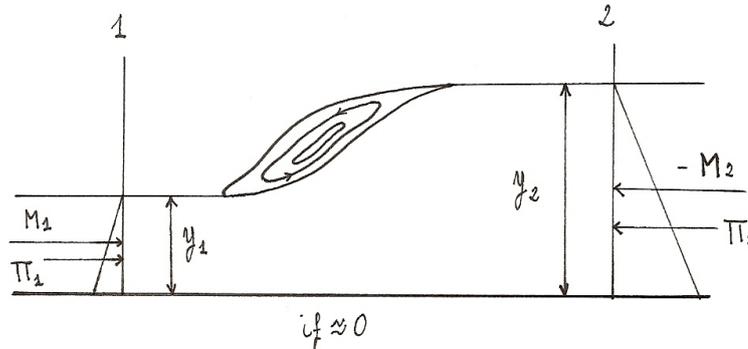


Figura 3.21: Applicazione dell'equazione globale dell'equilibrio dinamico.

Consideriamo un *tronco di corrente in alveo cilindrico*, compreso fra la sezione 1 che precede immediatamente il risalto e una sezione 2, che lo segue, alla minima distanza necessaria perché si possa considerare ristabilita la linearità della corrente e quindi la distribuzione idrostatica delle pressioni. Appliciamo a questo tronco l'equazione globale dell'equilibrio dinamico, *proiettandola nella direzione del moto e trascurando*:

- la componente del peso nella direzione stessa (equivale a supporre che il fondo sia orizzontale);
- la resistenza dell'alveo.

Le forze in gioco sono quindi:

- le *spinte idrostatiche* sulle sezioni estreme 1 e 2;
- le *quantità di moto* delle masse che attraversano le sezioni nell'unità di tempo.

Si può quindi scrivere:

$$\Pi_1 + M_1 = \Pi_2 + M_2 \quad (3.51)$$

La somma della spinta idrostatica  $\Pi$  e del flusso della quantità di moto  $M$  è detta *spinta totale*  $S$  della corrente.

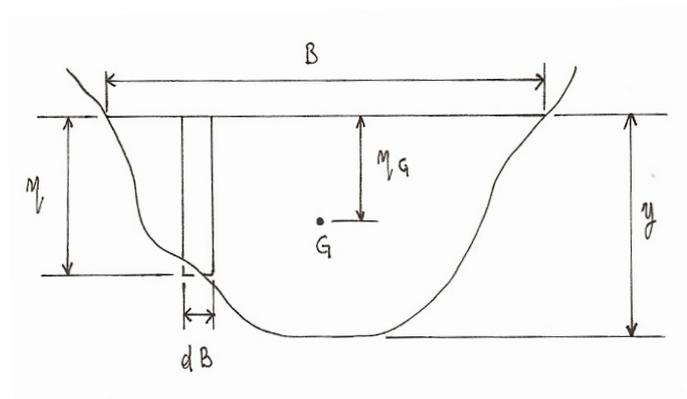


Figura 3.22: Generica sezione trasversale dell'alveo.

Consideriamo ora una generica sezione trasversale dell'alveo. Siano:

- $\Omega$ : area bagnata;
- $B$ : larghezza del pelo libero;
- $\eta_G$ : immersione del baricentro sotto il pelo dell'acqua.

La spinta totale può essere scritta come:

$$S = \gamma \int_{\Omega} \eta \, d\Omega + \rho QV = \gamma \Omega \eta_G + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = S(y) \quad (3.52)$$

Essa risulta funzione univoca di  $y$  quando si consideri la *portata costante* ( $Q = \text{cost}$ ) e la *geometria della sezione nota*.

Dal momento che:

- se  $y \rightarrow 0$  allora  $S = [0 + \infty] \rightarrow +\infty$
- se  $y \rightarrow +\infty$  allora  $S = [+ \infty + 0] \rightarrow +\infty$

$S(y)$  deve presentare un *punto di minimo*. Il valore di  $y$  che dà luogo al minimo di  $S$  si ottiene imponendo la condizione:

$$\frac{dS}{dy} = 0$$

Conviene prima esprimere la profondità  $\eta_G$  del baricentro come rapporto tra il momento statico della sezione rispetto al pelo libero e l'area della sezione stessa:

$$\eta_G = \frac{\frac{1}{2} \int \eta^2 \, dB}{\Omega}$$

a meno di infinitesimi di ordine superiore si ha quindi:

$$\frac{dS}{dy} = \gamma \int y \, dB - \rho \frac{Q^2}{\Omega^2} \frac{d\Omega}{dy} = \gamma \Omega - \rho \frac{Q^2 B}{\Omega^2} = 0$$

di cui si ottiene proprio la condizione che definisce lo *stato critico*:

$$\frac{Q^2 B}{g \Omega^3} = 1 \implies \frac{\Omega^3}{B} = \frac{Q^2}{g} \quad (3.53)$$

Così come l'energia specifica  $E$  anche la spinta totale  $S$  ha il proprio minimo in coincidenza con lo stato critico.

### Alvei a sezione rettangolare

Nel caso di sezione rettangolare la spinta totale vale:

$$S = \frac{1}{2} \gamma B y^2 + \rho \frac{Q^2}{B y}$$

ed il suo minimo si ha quando:

$$\frac{dS}{dy} = \gamma B y - \rho \frac{Q^2}{B y^2} = 0$$

cioè per:

$$y = y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} \quad (3.54)$$

Il *punto di minimo* suddivide dunque anche il grafico rappresentante la  $S(y)$  in due rami, di cui uno (per  $y < y_c$ ) rappresenta situazioni di corrente veloce e l'altro (per  $y > y_c$ ) situazioni di corrente lenta.

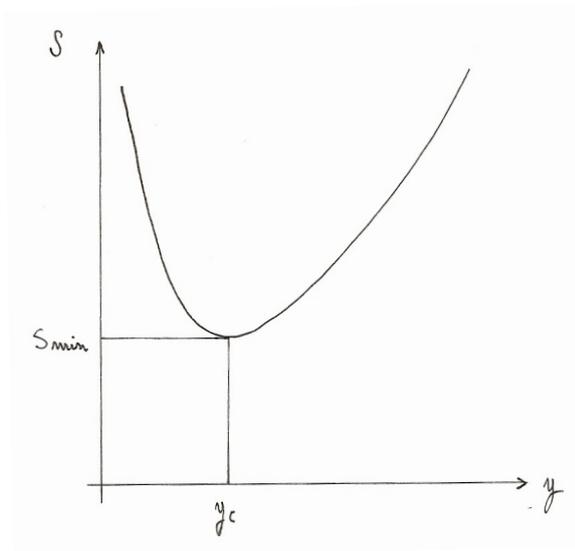


Figura 3.23: Andamento della spinta totale in funzione dell'altezza della corrente.

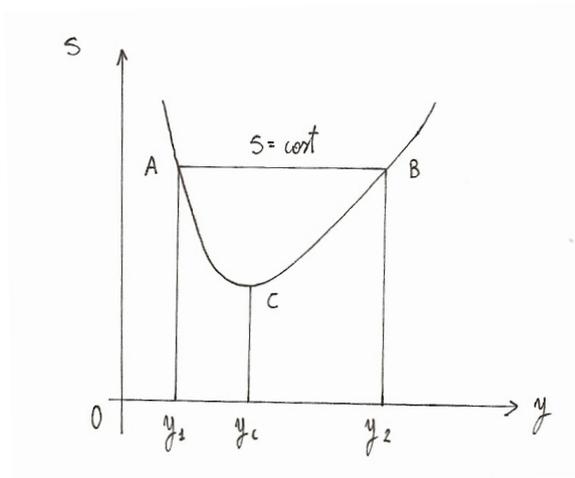


Figura 3.24: Altezze coniugate del risalto.

In base alla 3.51 le due altezze  $y_1$  e  $y_2$  delle sezioni che delimitano il risalto devono trovarsi allineate su una medesima parallela AB all'asse delle  $y$ : esse sono dette *altezze coniugate del risalto*.

Il grafico di figura 3.24 può essere tracciato in base alla 3.52 per una *qualsiasi sezione*; esso consente di risolvere il problema della determinazione dell'altezza a valle del risalto nota che sia quella a monte, o viceversa.

Nel caso di sezione rettangolare è pure agevole la *soluzione analitica*. Con riferimento ad una striscia di larghezza unitaria, percorsa dalla portata  $q = Q/B$ , la 3.51 si scrive:

$$\frac{1}{2}\gamma y_1^2 + \rho \frac{q^2}{y_1} = \frac{1}{2}\gamma y_2^2 + \rho \frac{q^2}{y_2}$$

da cui:

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{2} = \frac{q^2}{g} \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2} = y_c^3 \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2}$$

e quindi:

$$y_1 + y_2 = \frac{2y_c^3}{y_1 y_2} \quad (3.55)$$

Essa è una *relazione simmetrica* tra  $y_1$  e  $y_2$  in cui la portata entra come parametro attraverso l'altezza critica  $y_c$ . Essa consente di calcolare una qualsiasi delle altezze coinugate del risalto quando sia nota l'altra. Se ad esempio è nota l'altezza  $y_1$ , l'*equazione di 2° grado* in  $y_2$  fornisce come radice significativa:

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_1^3}} \right] = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right] \quad (3.56)$$

Nel caso di sezione rettangolare è pure abbastanza semplice il calcolo dell'*energia specifica dissipata nel risalto*:

$$E_1 - E_2 = y_1 - y_2 + \frac{q^2}{2g} \left( \frac{1}{y_1^2} - \frac{1}{y_2^2} \right) = y_1 - y_2 + \frac{y_c^3}{2} \frac{y_2^2 - y_1^2}{y_1^2 y_2^2}$$

da cui, eliminando  $y_c$  attraverso la 3.55, si ottiene:

$$E_1 - E_2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{4y_1 y_2} \quad (3.57)$$

### Forme di risalto idraulico

In funzione della velocità della corrente in entrata e quindi del suo numero di Froude cambia l'*aspetto esteriore* del risalto idraulico:

- $1 < Fr_1 \lesssim 1,7$ : il risalto assume un aspetto *ondulato*;
- $1,7 \lesssim Fr_1 \lesssim 2$ : il risalto assume l'aspetto di un *vortice* ad asse orizzontale;
- $Fr_1 > 3$ : il risalto assume l'aspetto di un *vortice* ad asse orizzontale con formazione di un'*onda frangente*.

### Lunghezza del risalto

La lunghezza  $L_R$  del tronco di corrente interessato dal risalto è un elemento che non si può valutare con precisione perché, mentre è abbastanza ben individuabile sperimentalmente la *sezione iniziale*, altrettanto non può dirsi per la *sezione terminale* del risalto stesso.

Esistono in letteratura alcuni *valori sperimentali* della lunghezza di risalto, espressi in funzione del numero di Froude  $Fr_1$  e parametrizzati o rispetto alla profondità di valle  $y_2$  o rispetto all'ampiezza del salto  $y_2 - y_1$ .

Tabella 3.1: Lunghezza del risalto.

$Fr_1$	$L_R/y_2$	$L_R/(y_2 - y_1)$
2	4,4	7,6
3	5,3	7,2
5	6,0	7,0
10	6,1	6,6
15	5,9	6,2
20	5,5	5,7

**Esempio**

Consideriamo un torrente di montagna (corrente veloce) che si getta in un lago (corrente lenta). Vogliamo individuare il punto in cui si forma il risalto applicando la condizione  $S_1 = S_2$ .

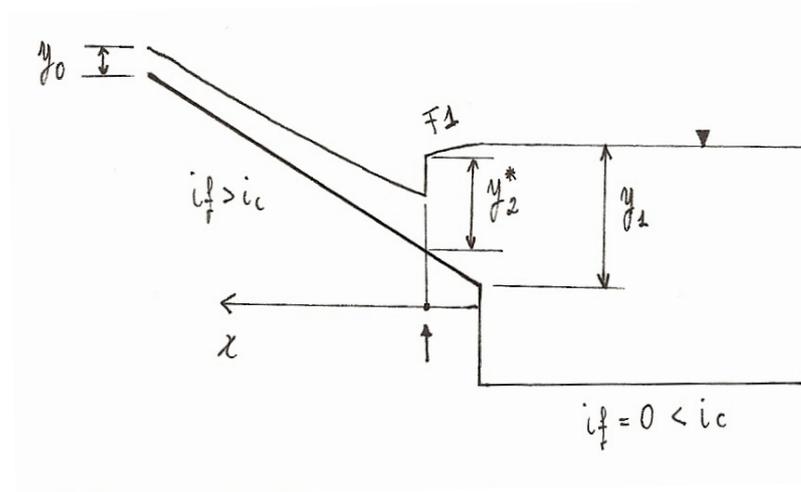


Figura 3.25: Determinazione della posizione del risalto.

Supponiamo che le cause perturbatrici a monte siano lontane, in modo da poter assumere a monte del risalto l'altezza di moto uniforme  $y_0$ , si trova quindi  $Fr_0$  e si calcola:

$$y_2^* = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \right]$$

È possibile quindi seguire il profilo F1 verso monte finché si ottiene un valore di  $y$  pari a  $y_2^*$ , è questo il punto in cui si forma il risalto. Approssimando il profilo F1 come orizzontale si può scrivere:

$$y_1 - i_f x = y_2^* \implies x \approx \frac{y_1 - y_2^*}{i_f}$$

## 3.7 Esempi applicativi

### 3.7.1 Procedura per la determinazione dei profili

1. Trovare l'altezza critica  $y_c$ .

Nel caso di alvei a sezione rettangolare vale la relazione:

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

2. Trovare l'altezza di moto uniforme  $y_0$ .

Nel caso di alvei rettangolari larghi ( $R \approx y$ ):

$$y_0 = \sqrt[3]{\frac{q^2}{C^2 g i_f}} \qquad y_0 = \left( \frac{q}{K_s i_f^{1/2}} \right)^{3/5}$$

Nel caso di alvei rettangolari si deve risolvere l'equazione non lineare in  $y_0$ :

$$q - K_s y_0 \left( \frac{B y_0}{B + 2y_0} \right)^{2/3} i_f^{1/2} = 0$$

Determinare se l'alveo è a forte o debole pendenza.

3. Determinare le *condizioni al contorno* e/o i *vincoli interni*.
4. Verificare la presenza di un eventuale passaggio da una corrente veloce a monte ad una lenta a valle e quindi la formazione di un *risalto idraulico*.

In caso affermativo ricorrere all'equazione globale dell'equilibrio dinamico.

Nel caso di alvei a sezione rettangolare la relazione per le profondità coniugate del risalto idraulico vale:

$$y_2 = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_1^3}} \right] = \frac{y_1}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right] \qquad Fr_1 = \frac{q}{y_1 \sqrt{g y_1}}$$

Trovare la *posizione* del risalto (nell'ipotesi che esso abbia un profilo verticale) in modo tale che  $y_1$  ed  $y_2$  siano una coppia di profondità coniugate.

### 3.7.2 Presenza di una paratoia piana in alvei a debole pendenza

Consideriamo l'effetto della presenza in una determinata sezione di un alveo cilindrico, di una paratoia piana, che obblighi la corrente a defluire attraverso una luce. La portata  $Q$  costante in moto uniforme assume l'altezza  $y_0$ . Essendo l'alveo a debole pendenza il moto uniforme vi si dovrebbe svolgere in regime di corrente lenta.

#### Condizioni al contorno

Poiché si è in un *alveo a debole pendenza* la condizione al contorno va ricercata a *valle*. Dal momento che non è presente nulla si suppone che le eventuali cause perturbatrici siano sufficientemente lontane in modo da poter supporre che il profilo sia asintotico con il profilo di moto uniforme (D1 o D2).

#### Vincoli interni

La luce della paratoia si comporta come un foro in un serbatoio, la portata uscente vale:

$$q = C_v C_c a \sqrt{2gy_m} \quad (3.58)$$

dove:

- $C_c$ : coefficiente di contrazione;
- $C_v$ : coefficiente correttivo per la velocità di approccio;
- $C_Q = C_c \cdot C_v$ : coefficiente di portata;
- $a$ : altezza della luce della paratoia;
- $y_m$ : altezza della corrente immediatamente a monte della paratoia.

L'altezza della corrente contratta è quindi da ritenere nota e pari a:

$$y_e = C_Q a \quad (3.59)$$

Nella *sezione contratta* la corrente deve necessariamente essere *veloce*: dal momento che l'area della sezione stessa e la velocità sono determinate dalla posizione della paratoia, la quale, rispetto alla sezione contratta, è situata a monte, la corrente non può essere lenta altrimenti la paratoia non potrebbe esercitarvi alcuna influenza.

Nella stessa *sezione contratta* l'energia specifica rispetto al fondo vale:

$$E_e = y_e + \frac{V_e^2}{2g} \quad (3.60)$$

Essa deve essere maggiore di quella competente al moto uniforme: prima che questo venga ricostituito verso valle la corrente veloce dovrà dissipare più energia che non la corrente uniforme (vedi relazione 3.47) e questa quantità in più dovrà essere stata accumulata in precedenza e trovarsi disponibile nella sezione contratta.

Supponendo *nulla la perdita di carico* nell'efflusso, l'altezza  $y_m$  che si stabilisce a monte della paratoia è subito determinata in base al grafico di figura 3.27 come quella della corrente lenta cui compete l'energia specifica rispetto al fondo  $E_e$ . Nel caso di alveo a sezione rettangolare si ha:

$$y_m = \frac{q^2}{C_Q^2 a^2 2g} \quad (3.61)$$

#### Tracciamento del profilo

Poiché la corrente a monte della paratoia è lenta deve essere  $y_m > y_0$ . Nel *tronco di canale a monte* si stabilisce un profilo di tipo D1 che è possibile tracciare per punti partendo dal suo estremo a valle dove è nota l'altezza  $y_m$ .

A *valle della paratoia* si stabilisce invece un profilo di tipo D3, ossia l'unico di corrente veloce realizzabile in alveo a debole pendenza. Esso può essere tracciato partendo dalla sezione contratta dove è nota l'altezza  $y_e$ .

A valle il profilo D3 tende all'altezza critica la quale però non viene raggiunta a causa dell'intervento di un *risalto idraulico* che riporta la corrente allo stato lento, ripristinando il moto uniforme di altezza  $y_0$ .

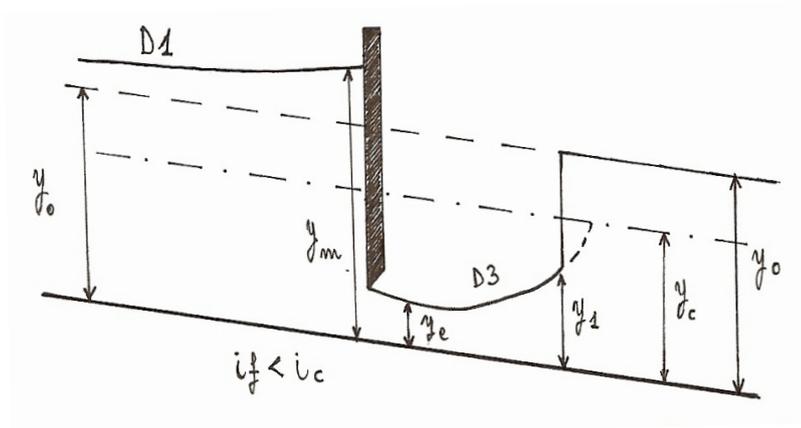


Figura 3.26: Paratoia in alveo a debole pendenza: profilo del moto.

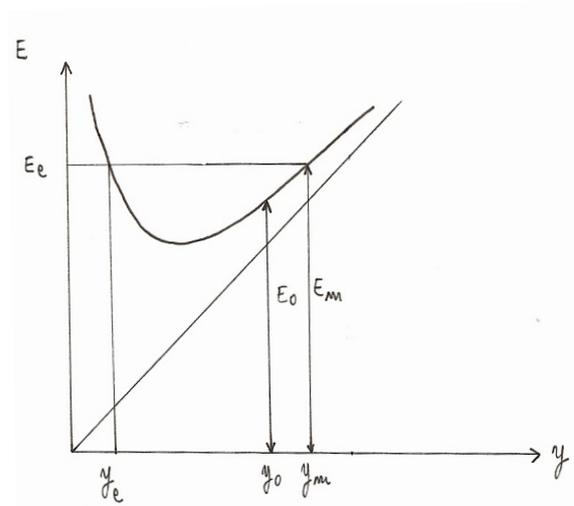


Figura 3.27: Paratoia in alveo a debole pendenza: energia specifica ed altezza della corrente.

**Posizione del risalto**

Nota l'altezza di valle  $y_0$  è possibile calcolare, nell'ipotesi di sezione rettangolare, l'altezza coniugata  $y_1$  a monte:

$$y_1 = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_0^3}} \right] = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \right]$$

Il risalto ha luogo proprio in quella sezione in cui il profilo di corrente veloce raggiunge l'altezza  $y_1$ .

**Aumento dell'area sotto la paratoia**

Aumentare l'altezza  $y_e$  significa traslare verso monte senza deformazione il profilo D3 della corrente veloce e quindi il risalto.

Quando l'altezza nella sezione contratta supera il valore  $y_1$  coniugato di  $y_0$  il profilo D3 scompare del tutto e il risalto risulta addossato del tutto alla paratoia (*risalto annegato*). L'efflusso non è più libero, bensì rigurgitato, e il livello a monte non dipende più soltanto dall'apertura della paratoia bensì anche dal livello che si viene a stabilire a valle, a ridosso di essa.

### 3.7.3 Presenza di una paratoia piana in alvei a forte pendenza

#### Condizioni al contorno

Poiché si è in un *alveo a forte pendenza* la condizione al contorno va ricercata a *monte*. Dal momento che non è presente nulla si suppone che le eventuali cause perturbatrici siano sufficientemente lontane in modo da poter supporre che il profilo sia asintotico con il profilo di moto uniforme (F2 o F3).

#### Vincoli interni

La paratoia origina ancora subito a valle una sezione contratta di altezza  $y_e$ ; e subito a monte si stabilisce un'altezza  $y_m$ , che è possibile determinare come in precedenza.

Anche in questo caso, subito *a monte della paratoia*, la *corrente risulta lenta*: è necessario che ciò avvenga affinché la paratoia possa agire su di essa in modo da procurare quell'incremento di energia specifica occorrente per vincere le maggiori resistenze della corrente a valle (vedi relazione 3.47), che si svolge con altezze inferiori a quella del moto uniforme.

#### Tracciamento del profilo

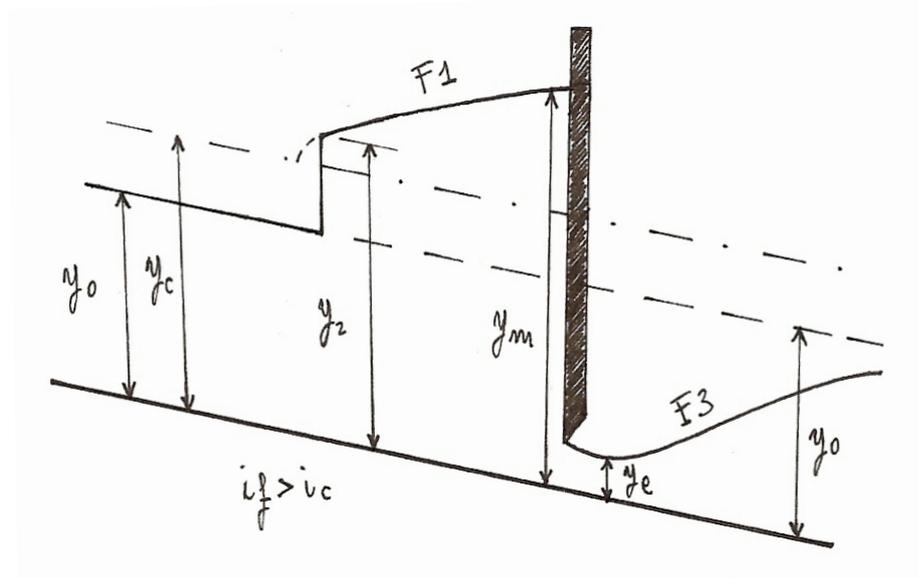


Figura 3.28: Paratoia in alveo a forte pendenza: profilo del moto.

Il profilo di moto permanente che si stabilisce *a valle* con  $y < y_0$  è del tipo F3, asintotico al moto uniforme. Lo si può tracciare per punti a partire dalla sezione contratta in cui è nota  $y_e$ .

*A monte della paratoia* si stabilisce invece un profilo di tipo F1, ossia l'unico di corrente lenta realizzabile in alveo a forte pendenza. Esso può essere tracciato partendo dall'estremo di valle dove è nota l'altezza  $y_m$ .

A monte il profilo F1 tende all'altezza critica la quale però non viene raggiunta a causa dell'intervento di un *risalto idraulico* che riporta la corrente allo stato veloce, ripristinando il moto uniforme di altezza  $y_0$ .

#### Posizione del risalto

Nota l'altezza di monte  $y_0$  è possibile calcolare, nell'ipotesi di sezione rettangolare, l'altezza coniugata  $y_2$  a valle:

$$y_2 = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8y_c^3}{y_0^3}} \right] = \frac{y_0}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_0^2} \right]$$

Il risalto si ha proprio in quella sezione in cui il profilo di corrente lenta F1 raggiunge l'altezza  $y_2$ .

### 3.7.4 Cambio di pendenza con paratoia piana

Consideriamo un alveo a debole pendenza a valle di una paratoia che vi determina una corrente veloce con profilo D3. Supponiamo che dopo un tratto più o meno lungo l'alveo diventi a forte pendenza.

Siano  $y'_0$  e  $y''_0$  le altezze di moto uniforme nei due tronchi d'alveo e  $y_c$  l'altezza critica.

Si possono presentare due diverse situazioni a seconda della lunghezza  $L$  del tratto d'alveo a debole pendenza:

1. lunghezza minore di quella necessaria ( $L_c$ ) affinché il profilo D3 pervenga allo stato critico;
2. lunghezza maggiore di quella necessaria ( $L_c$ ) affinché il profilo D3 pervenga allo stato critico.

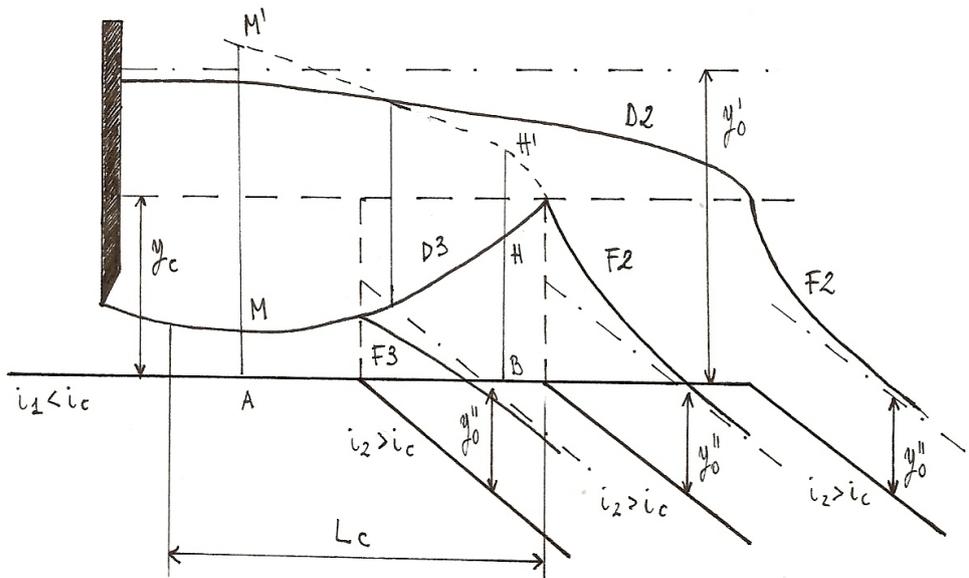


Figura 3.29: Cambio di pendenza con paratoia piana: profilo del moto.

$L < L_c$

In questo caso la corrente resta ovunque *veloce*. A valle della sezione dove ha luogo il cambiamento di pendenza si sviluppa un profilo di tipo F2 o F3 a seconda che  $y''_0$  sia minore o maggiore dell'altezza raggiunta dal profilo D3. Al limite si può avere in corrispondenza del cambiamento di pendenza proprio l'altezza critica  $y_c$ , nel cui caso si avrà verso valle un profilo F2, partente proprio da  $y_c$ .

$L > L_c$

In questo caso la corrente veloce non può svilupparsi fino a  $y_c$  ma interviene prima un *risalto* che la trasforma in corrente lenta. L'altezza critica viene quindi a cadere proprio in corrispondenza del cambiamento di pendenza e a monte si ha un profilo D2 fino alla sezione dove ha luogo il risalto.

#### Posizione del risalto

La localizzazione della sezione in cui avviene il risalto non è immediata in quanto non si conosce a priori nessuna delle due altezze coniugate.

Il procedimento da seguire è: per alcune sezioni (AM, BH, ...) del profilo di monte D3 (o di quello di valle) si determinano le altezze coniugate (AM', BH', ...) e si riportano a partire dal fondo. Gli estremi superiori (M', H', ...) si trovano su una curva, detta *luogo del risalto*, che si traccia unendoli "a sentimento": essa taglia il profilo di valle (o di monte) proprio nella sezione dove avviene il risalto.

### 3.7.5 Passaggio sopra una soglia di fondo

Supponiamo che una soglia di altezza  $a$  e di modesta lunghezza interrompa la continuità di un alveo.

#### Energia specifica elevata e/o altezza della soglia piccola

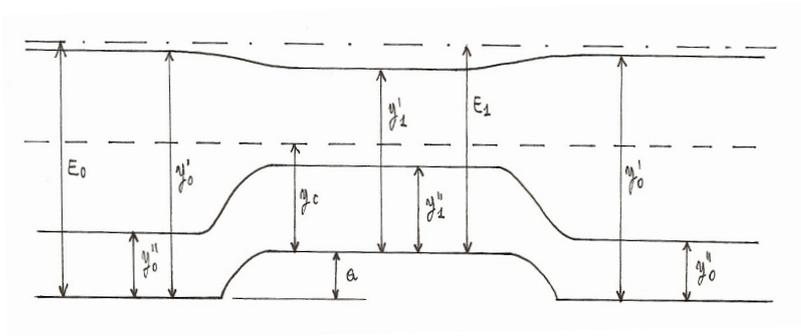


Figura 3.30: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica elevata): profilo del moto.

Sia  $E_0$  l'energia specifica della corrente in arrivo, supponiamo che nel breve percorso della corrente lungo il raccordo iniziale della soglia le dissipazioni siano trascurabili: sopra la soglia si ritrova la linea dell'energia alla medesima quota che a monte della soglia. Ciò significa che l'energia specifica risulta minore:

$$E_1 = E_0 - a \quad (3.62)$$

Analizzando il grafico dell'energia specifica in funzione dell'altezza.

- *Alveo a forte pendenza*: la corrente veloce passa dall'altezza  $y_0''$  del moto uniforme ad un'altezza  $y_1' > y_0''$ .

Il pelo libero di solleva ed il sollevamento risulta maggiore dell'altezza stessa della soglia.

- *Alveo a debole pendenza*: la corrente lenta passa dall'altezza  $y_0'$  del moto uniforme ad un'altezza  $y_1' < y_0'$ . Poiché l'inclinazione della  $E(y)$  è minore di quella della bisettrice degli assi risulta  $y_0' - y_1' > a$ .

Il pelo libero della corrente sulla soglia si *abbassa*.

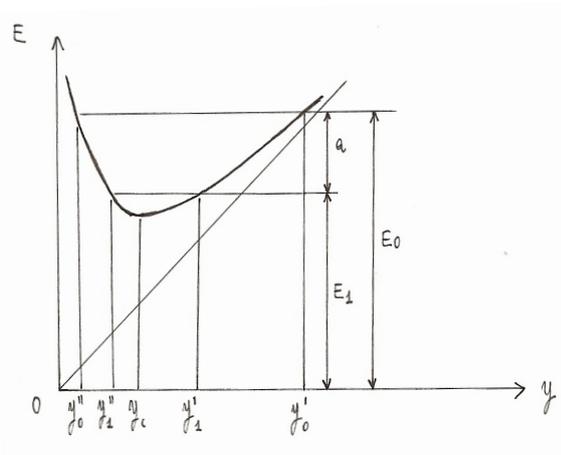


Figura 3.31: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica elevata): energia specifica ed altezza della corrente.

**Energia specifica piccola e/o altezza della soglia elevata**

In questo caso può darsi che l'energia specifica  $E_0$  della corrente in arrivo non sia sufficiente per farle oltrepassare la soglia.

Ciò avviene quando la retta di equazione  $E = E' = E_0 - a$  non taglia il grafico della  $E(y)$ , essendo appunto  $E' < E_c$ .

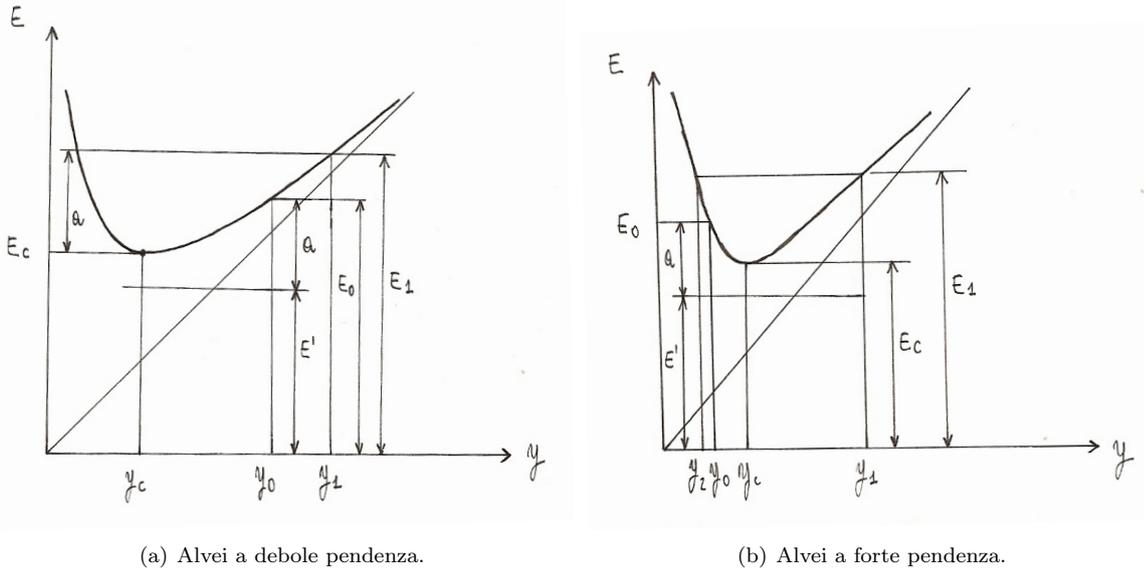


Figura 3.32: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica piccola): energia specifica ed altezza della corrente.

- *Alveo a debole pendenza:* la corrente è costretta a rigurgitare, il suo livello si solleva e con ciò, essendo la corrente lenta, aumenta l'energia specifica, fino al minimo valore indispensabile.

Questo viene raggiunto quando sulla soglia si stabilisce proprio lo *stato critico*, con altezza  $y_c$  e carico totale  $E_c$  rispetto al piano superiore della soglia stessa.

Subito a monte avremo un carico totale  $E_1 = E_c + a$  rispetto al fondo dell'alveo, e corrispondentemente un'altezza  $y_1 > y_0$ : un *profilo di rigurgito* del tipo D1 si estenderà fino all'infinito a monte.

Raggiunto lo stato critico sulla soglia, la corrente, sempre accelerando, diventa subito a valle *veloce*, in quanto le sue condizioni sono determinate proprio dalla soglia (causa posta a monte).

Nell'ipotesi che anche al termine della soglia non intervenga sensibile dissipazione di energia, l'altezza  $y_2$  subito al piede della soglia è fornita dal grafico della  $E(y)$ .

Deve seguire un profilo di tipo D3, di corrente veloce ritardata in alveo a debole pendenza, interrotto infine da un *risalto* che ristabilisce il moto uniforme.

- *Alveo a forte pendenza:* anche in questo caso si stabilisce sulla soglia lo stato critico. Ciò richiede tuttavia un sollevamento della linea dell'energia anche a monte e quindi un'influenza della soglia sulla corrente in arrivo, ne consegue che questa deve diventare *lenta*, assumendo subito a monte l'altezza  $y_1$  corrispondente al carico totale  $E_1 = E_c + a$ .

Si stabilisce un *profilo di rigurgito* di tipo F1, di corrente lenta in alveo a forte pendenza, che inizia a monte con un *risalto*.

Varcato lo stato critico sulla soglia, a valle la corrente ridiventa *veloce*; ma subito al piede, nell'ipotesi che anche allo sbocco non si dissipi energia e quindi il carico totale rispetto al fondo resti  $E_1$ , si ha un'altezza  $y_2 < y_0$ , in quanto in una corrente veloce un aumento di energia corrisponde ad una diminuzione di altezza.

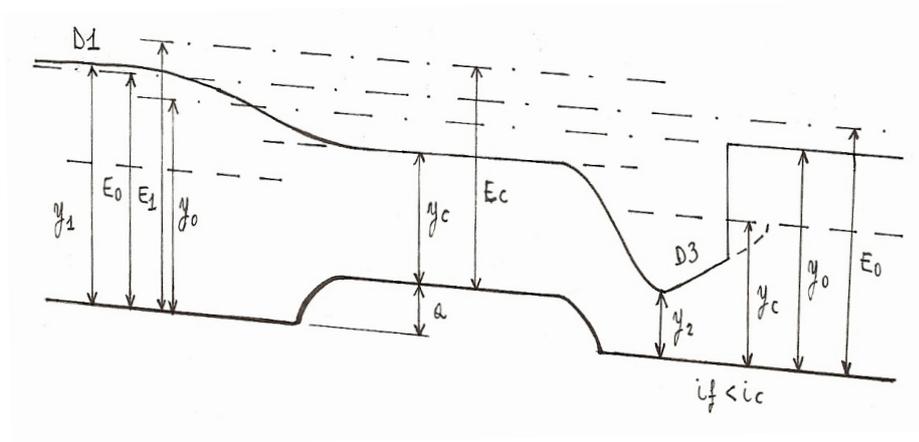


Figura 3.33: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica piccola): profilo del moto per alvei a debole pendenza.

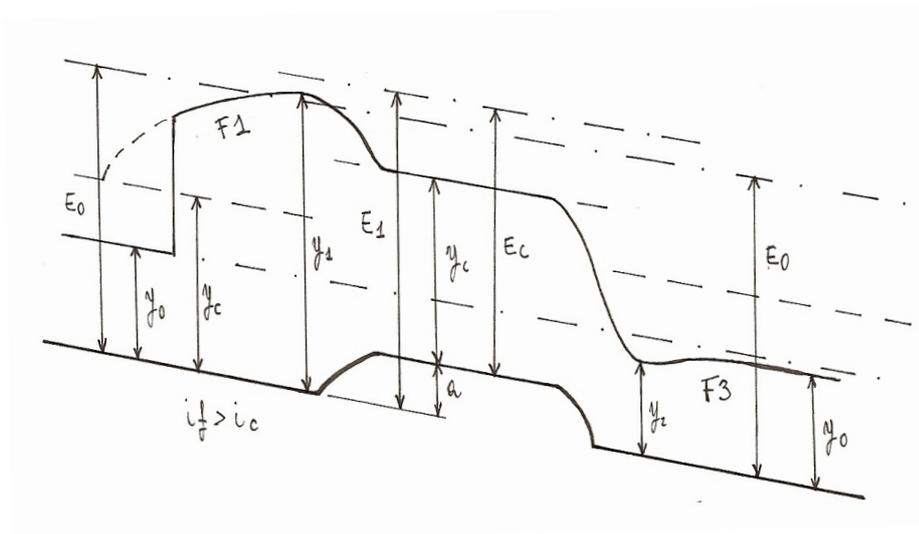


Figura 3.34: Passaggio sopra una soglia di fondo (energia specifica piccola): profilo del moto per alvei a forte pendenza.

Il moto uniforme viene ristabilito asintoticamente verso valle, a mezzo di un profilo del tipo F3.

### 3.7.6 Stabilizzazione di un risalto idraulico

La determinazione della posizione del risalto serve ad individuare le zone in cui il fondo del canale sarà sottoposto a *forti sollecitazioni*. Essendo infatti il risalto un fenomeno fortemente dissipativo esso provoca delle forti perturbazioni di pressione verso il fondo, le quali si trasferiscono attraverso i giunti della pavimentazione alla faccia sottostante le piastre.

Consideriamo lo *sfiatore* di una diga: esso è costituito da una sorta di scivolo che permette di scaricare a valle l'eccesso d'acqua dovuto ad un'onda di piena. Poiché la pendenza di tale scivolo può raggiungere anche il 100% tutta l'energia presente alla sommità si trasferisce a valle, dove viene dissipata mediante un risalto, di cui è necessario stabilizzare la posizione *al piede dello scivolo*. Il risalto tende infatti a spingersi molto a valle in quanto:

$$y'_3 = \frac{y_2}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_2^2} \right] \gg y_{0v}$$

Le possibilità che si presentano sono due.

1. Approfondire la vasca di una quantità  $a$  in modo tale che:

$$y_{0v} + a = y'_3$$

2. Creare uno sbarramento, detta *controbriglia*, di altezza  $b$  in modo che:

$$y_s + b = y'_3 \implies b = y'_3 - y_s$$

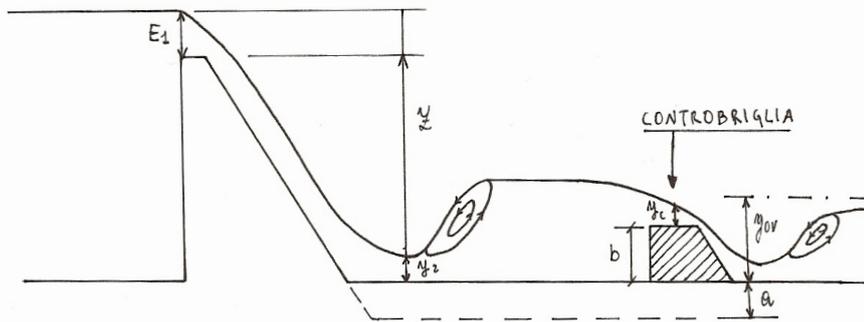


Figura 3.35: Stabilizzazione di un risalto idraulico: profilo del moto.

L'altezza  $y_s$  può essere ottenuta considerando le formule per gli *stramazzi*:

$$Q = C_Q B_s y_s \sqrt{2g y_s} \implies y_s \left( \approx \frac{3}{2} y_c \right)$$

A valle della controbriglia si formerà un *altro risalto*, il quale tuttavia sarà molto più piccolo, in quanto gran parte dell'energia sarà stata già dissipata nella prima vasca.

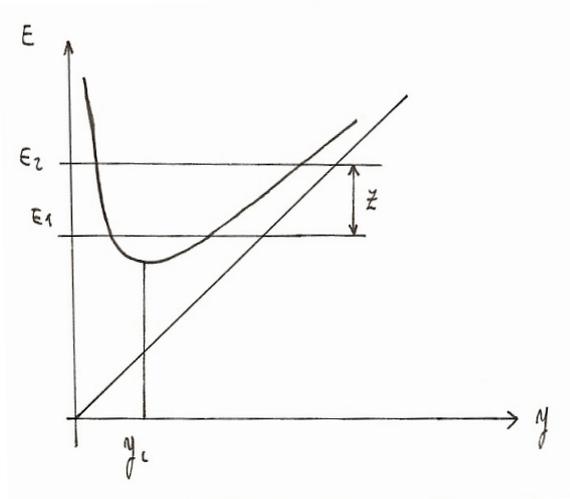


Figura 3.36: Stabilizzazione di un risalto idraulico: energia specifica ed altezza della corrente.

### 3.7.7 Passaggio fra le pile di un ponte

Il processo di movimento in questo caso è del tutto paragonabile a quello visto per il caso della passaggio sopra una soglia di fondo, tuttavia in questo caso:

- si *mantiene costante* l'energia specifica  $E$  rispetto al fondo;
- *varia* la portata  $q$  per unità di larghezza.

Consideriamo una corrente che supponiamo contenuta in un alveo a sezione rettangolare larga  $B_1$ , sia  $Q$  la sua portata e quindi  $q_1 = Q/B_1$  la portata per unità di larghezza del canale.

Facciamo l'ipotesi che il passaggio tra le pile del ponte avvenga senza sensibile dissipazione di energia ( $E = \text{cost}$ ). Fra le pile la larghezza complessiva della sezione liquida si riduce a  $B_2 < B_1$  e quindi la portata unitaria aumenta diventando  $q_2 = Q/B_2 > q_1$ .

#### Piccolo restringimento

Consideriamo separatamente i due casi di alvei a debole e a forte pendenza; siano  $y'_0$  e  $y''_0$  le rispettive altezze di moto uniforme.

- *Alvei a debole pendenza*: poichè a parità di  $y$  all'aumentare di  $q$  si ha un aumento di  $E$ , ne consegue che per effetto del restringimento:
  - $y_c$  aumenta;
  - $y'_1 < y'_0$ : la corrente si *abbassa*.
- *Alvei a forte pendenza*: in maniera analoga si ha:
  - $y_c$  aumenta;
  - $y''_1 > y''_0$ : la corrente si *alza*.

Si trova quindi lo stesso fenomeno che si era trovato studiando il passaggio sopra una soglia con l'osservazione che:

- ✓ *corrente lenta*: l'aumento della portata unitaria si attua mediante un aumento di velocità al quale corrisponde una diminuzione della quota piezometrica ( $y$ );
- ✓ *corrente veloce*: l'aumento della portata unitaria si attua mediante una diminuzione dell'energia cinetica, che porta ad un aumento dell'area liquida.

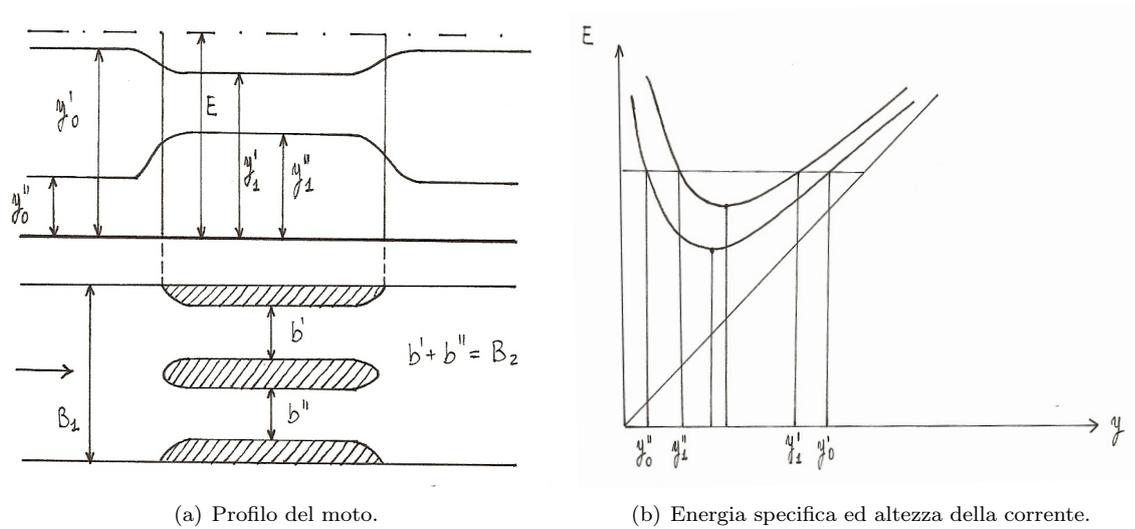


Figura 3.37: Passaggio tra le pile di un ponte (piccolo restringimento).

**Grande restringimento**

Può anche in questo caso succedere che, se il restringimento della sezione è piuttosto rilevante, l'energia disponibile nella corrente in arrivo non sia sufficiente a superare l'ostacolo.

Interviene un *rigurgito* che realizza subito a monte del ponte una corrente lenta con carico totale  $E_1 > E_0$ .

In particolare la corrente si porta ad un livello energetico pari al minimo valore indispensabile per il passaggio fra le pile, ossia quel valore per cui il passaggio si realizza allo *stato critico* con altezza:

$$y_{c1} = \sqrt[3]{\frac{q_2^2}{g}}$$

Il valore dell'energia è quindi pari a:

$$E_1 = \frac{3}{2}y_{c1}$$

Il valore di  $y_1$  è ottenibile risolvendo l'equazione non lineare:

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q_2^2}{g}} = y_1 + \frac{q_1^2}{2gy_1^2}$$

- *Alvei a debole pendenza*: il rigurgito provocato dal ponte si estende fino all'infinito a monte, secondo un profilo di tipo D1.

La corrente, attraversato lo stato critico fra le pile, diventa veloce subito a valle, con altezza  $y_2$  deducibile dal grafico di figura 3.38, nell'ipotesi che anche allo sbocco la dissipazione di energia sia trascurabile. Segue un profilo D3, di corrente veloce, che termina con un *risalto*, a valle del quale si ristabilisce il *moto uniforme*.

- *Alvei a forte pendenza*: subito a monte del ponte si ha un profilo di tipo F1, di corrente lenta, che inizia con un *risalto*, a monte del quale si ha il *moto uniforme* della corrente veloce.

A valle del ponte, subito dopo lo sbocco, la corrente veloce ha altezza  $y_2 < y_0$ , ed il moto uniforme viene ristabilito asintoticamente, a mezzo di un profilo di tipo F3.

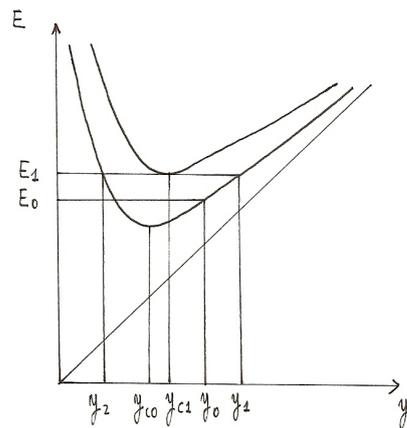


Figura 3.38: Passaggio attraverso le pile di un ponte (forte restringimento): energia specifica ed altezza della corrente per alvei a debole pendenza.

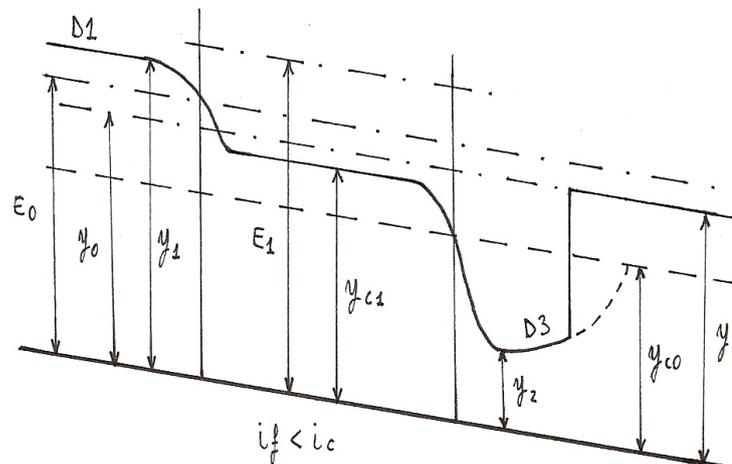


Figura 3.39: Passaggio attraverso le pile di un ponte (forte restringimento): profilo del moto per alvei a debole pendenza.

### Condizione di non attraversamento della profondità critica

La condizione affinché in assenza di perdite non si verifichi l'attraversamento della profondità critica è che l'energia specifica della corrente indisturbata sia maggiore od uguale all'energia specifica critica per la portata assegnata:

$$y_{01} + \frac{q_1^2}{2gy_{01}^2} \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q_2^2}{g}} \quad (3.63)$$

Il numero di Froude della corrente indisturbata vale:

$$Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gy_{01}}} = \frac{q_1}{y_{01}\sqrt{gy_{01}}}$$

e quindi la 3.63 diventa:

$$1 + \frac{Fr_0^2}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{Fr_0 B_1}{B_2} \right)^{2/3} \geq 0 \quad (3.64)$$

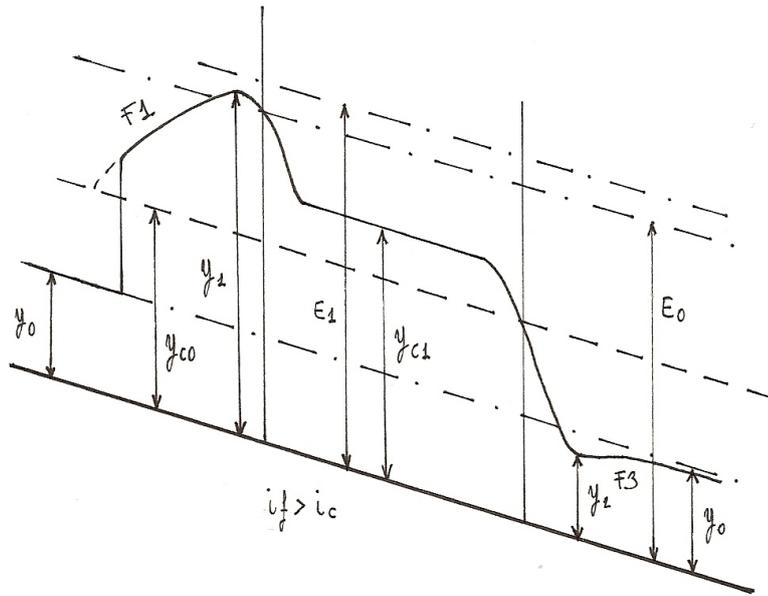


Figura 3.40: Passaggio attraverso le pile di un ponte (forte restringimento): profilo del moto per alvei a forte pendenza.

Nel caso di uguaglianza, ad ogni valore del rapporto di restringimento  $B_2/B_1$  corrispondono due soluzioni positive per i numeri di Froude  $Fr_0$ , che si indicano come numeri limite  $F_L$ :  $F_L' < 1$  e  $F_L'' > 1$ . La corrente si mantiene ovunque lenta nel passaggio attraverso il restringimento se risulta  $Fr_0 \leq F_L'$  ed analogamente ovunque veloce se  $Fr_0 > F_L''$ .

Il diagramma di figura 3.41 rappresenta l'andamento delle soluzioni  $F_L$  in funzione del rapporto di restringimento  $B_2/B_1$ . Si individuano 3 campi:

1. il moto avviene in condizione di corrente sempre lenta: *moto subcritico*;  
(equivale al caso dell'alveo a debole pendenza con piccolo restringimento);
2. il moto avviene in condizione di corrente sempre veloce: *moto supercritico*;  
(equivale al caso dell'alveo a forte pendenza con piccolo restringimento);
3. il moto avviene con *transizione* attraverso la profondità critica:
  - 3': alveo a debole pendenza con grande restringimento;
  - 3'': alveo a forte pendenza con grande restringimento.

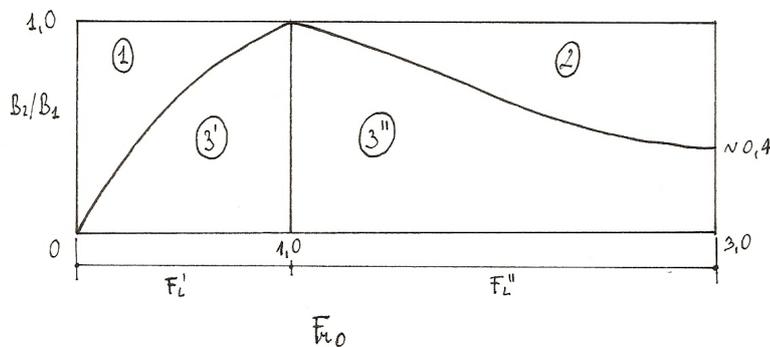


Figura 3.41: Andamento delle soluzioni  $F_L$  in funzione del rapporto di restringimento.

### Valutazione del rigurgito per il moto in condizioni subcritiche

Quando il punto di coordinate assegnate  $(Fr_0, B_2/B_1)$  cade in campo 1 il rigurgito  $\Delta y$ , cioè la sopraelevazione del pelo libero a monte del restringimento rispetto alla profondità  $y_0$  della corrente indisturbata<sup>2</sup>, si può calcolare con la *formula empirica di Yarnell*:

$$\frac{\Delta y}{y_0} = k_2(k_2 - 0,6 + 5Fr_0^2) \left[ 1 - \frac{B_2}{B_1} + 15 \left( 1 - \frac{B_2}{B_1} \right)^4 \right] Fr_0^2 \quad (3.65)$$

dove  $k_2$  è un *fattore di forma delle pile*, i cui valori sono indicati nella figura 3.42.

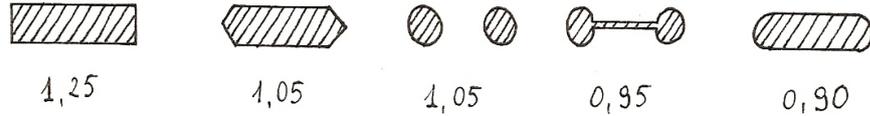


Figura 3.42: Fattore di forma  $k_2$  delle pile del ponte per la formula di Yarnell.

<sup>2</sup>Questo rigurgito non è riportato nel disegno di figura 3.37(a).

### 3.8 Tracce dell'onda di piena

Si è già detto nel capitolo 1 che in *condizioni di piena* risulta estremamente difficoltoso eseguire delle buone misurazioni dirette della *portata* in un corso d'acqua. Risulta a tal proposito interessante valutare le *tracce* lasciate sulle sponde dalle onde di piena: esse sono formate generalmente o da una striscia di limo depositato o dal segno dell'erba piegata. Tali tracce hanno il vantaggio di rimanere ben visibili anche *alcuni giorni* dopo l'evento permettendone così un rilievo mediante picchettaggi da parte di una squadra topografica.

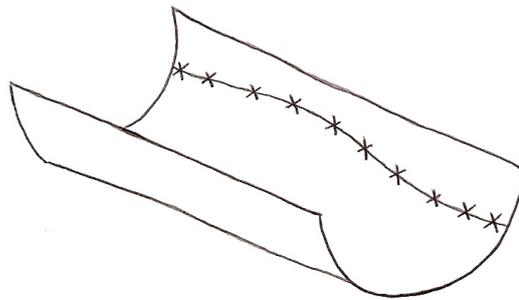


Figura 3.43: Picchettaggio della traccia dell'onda di piena.

#### 3.8.1 Valutazione della portata in condizioni di piena

Per la valutazione della portata in condizioni di piena è quindi possibile seguire un procedimento di questo tipo.

1. Si riporta in un grafico  $x - Z$  l'andamento della quota del fondo  $Z_f$  in un funzione della coordinata longitudinale  $x$  rispetto ad un sistema di riferimento per le quote, ciò avviene per punti attraverso il rilievo topografico di una serie di sezioni trasversali del canale.
2. Si riportano sullo stesso grafico le altezze dei punti picchettati  $Z_P(x)$ .
3. Noti il coefficiente di scabrezza del canale  $K_s$  e la condizione al contorno  $y_0$ , altezza di monte o di valle a seconda del tipo di corrente, si sfrutta l'equazione del profilo del pelo libero in moto permanente  $y = y(x; Q, K_s, y_0)$  (calcolabile alle differenze finite) per trovare la portata  $Q$  che minimizza una determinata funzione obiettivo relativa a:

$$\varepsilon = y + Z_f - Z_P \tag{3.66}$$

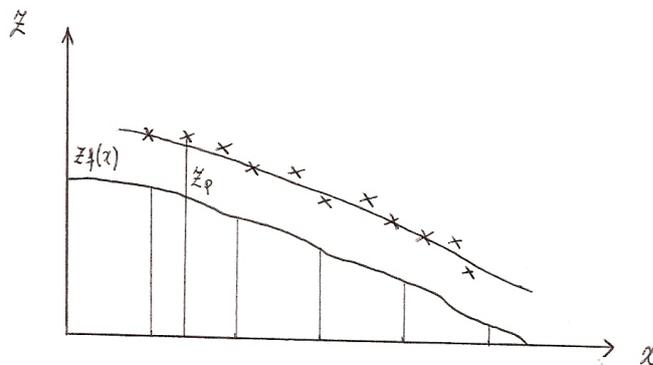


Figura 3.44: Valutazione della portata mediante la traccia dell'onda di piena.

4. Tipi possibili di *funzione obiettivo* sono:

(a) *minimi quadrati*:

$$\min_Q \left( \sum \varepsilon^2 \right) \quad (3.67)$$

(b) *minimax*:

$$\min_Q (\max |\varepsilon|) \quad (3.68)$$

### 3.8.2 Valutazione di variazioni del coefficiente di scabrezza

La differenza esistente tra i punti del profilo calcolati alle differenze finite e i punti calcolati può essere utile, entro certi limiti, per la valutazione di eventuali variazioni di scabrezza del canale nel tratto considerato.

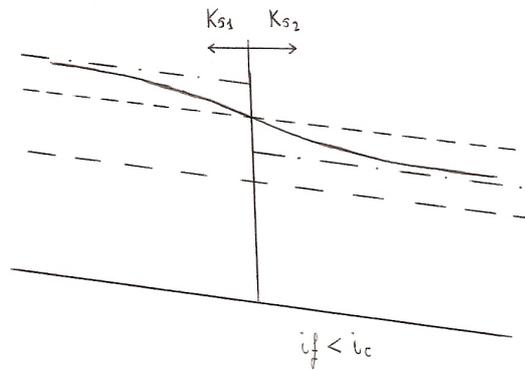


Figura 3.45: Variazione del coefficiente di scabrezza: profilo del pelo libero.

In base alla formula di Gauckler-Strickler si ha che:

$$Q = K_s R^{2/3} \Omega J^{1/2}$$

Grazie alla picchettatura del profilo e al rilievo topografico delle sezioni è possibile conoscere  $\Omega$ ,  $R$ ,  $y$  ed entro certi limiti  $J$ . Rimane incognita la coppia  $Q$ ,  $K_s$ . Supponiamo di aver scelto un unico valore di  $K_{s_1}$  costante per tutto il tronco di canale considerato ma che in realtà questo passi dal valore  $K_{s_1}$  nel primo tratto ad un valore  $K_{s_2} > K_{s_1}$  nel secondo (vedi anche relazione 3.26). Ciò che si ottiene è un profilo che ben si adatta ai punti misurati nel primo tratto e male a quelli del secondo.

...

### 3.9 Estrapolazione della scala delle portate

In tratti di alveo in cui è noto il coefficiente di scabrezza  $K_s$  i profili di moto permanente possono essere utilizzati per tarare la scala delle portate ed estrapolarla per alti valori della portata stessa.

Si è visto come in condizione di corrente lenta una perturbazione a valle produca un profilo di tipo D1 o D2 che converge verso monte a quello di moto uniforme. Il procedimento da seguire è il seguente: si fissa una portata  $Q$  e si calcola il profilo del moto permanente soggetto ad ipotesi arbitrarie circa la profondità  $y$  a valle ( $y_c, y_1, y_2, \dots$ ), in questo modo si riesce a determinare alle differenze finite il livello  $h$  corrispondente nella sezione di misura dove è installato l'idrometro ( $h_c, h_1, h_2, \dots$ ). Se la distanza tra sezione a valle e sezione di misura a monte è grande allora i valori di  $h$  convergono ad un unico valore (quello di moto uniforme). Per ottenere il livello corrispondente alla portata  $Q$  si effettua la media degli  $h$  calcolati.

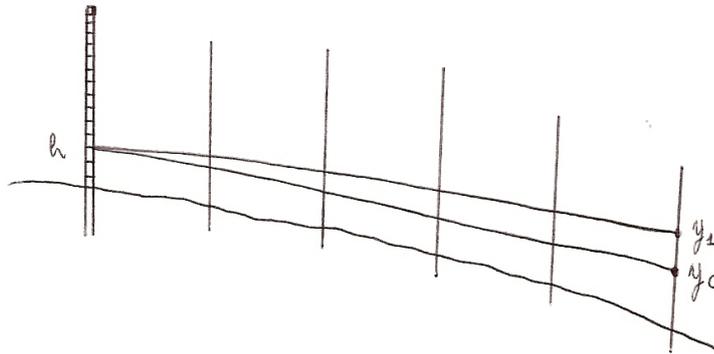


Figura 3.46: Calcolo dei profili del pelo libero.

Ciò può essere fatto per diversi valori della portata  $Q$  ottenendo in tal modo altre coppie  $(Q, h)$  da utilizzare per la determinazione della scala delle portate.

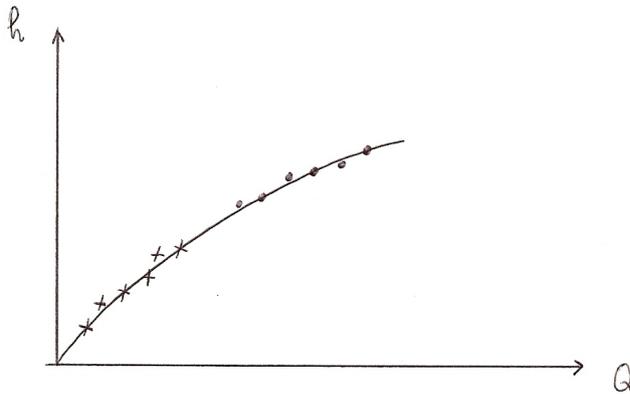


Figura 3.47: Estrapolazione della scala delle portate.

### 3.10 Alvei con sezioni composite o con scabrezza eterogenea

La sezione trasversale dei corsi d'acqua a pelo libero è spesso costituita da parti chiaramente diverse tra loro per la forma, la profondità e talvolta anche per la scabrezza.

Negli alvei naturali la parte centrale, più profonda, costituisce il *letto di magra* ( $Ks = 35 \div 45 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ ), mentre le parti laterali si estendono sopra le *gole* ( $Ks = 15 \div 25 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$  in presenza di vegetazione rada) fino agli *argini maestri*, destinate al contenimento delle portate di piena.

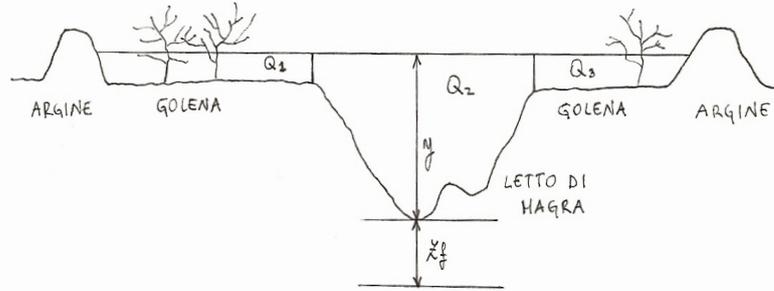


Figura 3.48: Esempio di alveo con sezione composta e scabrezza eterogenea.

#### 3.10.1 Calcolo della portata totale

Il deflusso in queste condizioni avviene con velocità differenti nelle varie parti sia per variazione del raggio idraulico sia del coefficiente di scabrezza. Per il calcolo della portata totale si può scrivere, in base alla legge di Gauckler-Strickler:

$$Q = K_s \Omega R^{2/3} J^{1/2} = K \cdot J^{1/2} \quad (3.69)$$

dove  $K$  è detta *capacità di convogliamento* (conveyance).

Dal punto di vista operativo si ipotizza che il livello d'acqua sia orizzontale lungo tutta la sezione e si valutano separatamente i contributi alla portata delle singole sottosezioni in cui si può suddividere l'intera sezione. La separazione si fa di solito mediante rette verticali. Si può quindi scrivere:

$$Q = \sum Q_i = \sqrt{J} \sum_i K_i \quad (3.70)$$

Le singole capacità di convogliamento riferite alle sottosezioni si possono calcolare una volta che siano noti il coefficiente di scabrezza, l'area della sottosezione ed il raggio idraulico:

$$K_i = K_{s_i} \Omega_i R_i^{2/3} \quad (3.71)$$

Per la valutazione del perimetro bagnato delle singole sottosezioni può venire il dubbio se considerare o meno l'interfaccia di separazione liquido-liquido. A tal proposito esistono due possibilità operative:

1. si suppone che le tensioni tangenziali all'interfaccia liquida, al pari di quelle all'interfaccia liquido-aria, siano trascurabili e quindi non si considerano tali tratti;
2. alcuni autori sostengono che:
  - per quanto riguarda le sottosezioni relative alle aree golenali si debba trascurare tale interfaccia in quanto la velocità in tali zone è più piccola di quella del canale principale;
  - per quanto riguarda la sottosezione relativa al canale principale si considera anche tale interfaccia in quanto, essendo le sezioni adiacenti a velocità più bassa, l'attrito non è trascurabile.

### 3.11 Curve nei canali

#### 3.11.1 Correnti lente

L'effetto di una curva su una corrente lenta è messo in evidenza dalla *inclinazione* che assume la superficie libera, con una *sopraelevazione* sulla sponda esterna ed una *depressione* su quella interna.

Lo studio del fenomeno si può condurre in modo semplificato su una *curva circolare a fondo piano e pareti verticali* assumendo che le velocità dipendano dal raggio di curvatura  $r$  come nel *vortice irrotazionale*.

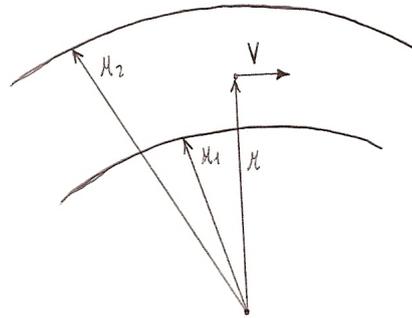


Figura 3.49: Curva circolare in un canale.

Ogni elemento fluido è soggetto alla forza specifica verticale  $g$  dovuta al potenziale gravitazionale e ad una *forza centrifuga* specifica orizzontale pari a  $V^2/r$ . Il pelo libero deve perciò assumere una pendenza trasversale per disporsi perpendicolarmente alla risultante di queste due forze. Ne consegue che la *pendenza del pelo libero* è data da:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{V^2}{gr}$$

ed avendo assunto:

$$V = \frac{c_1}{r}$$

con  $c_1$  intensità del vortice, si ottiene:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{c_1^2}{gr^3}$$

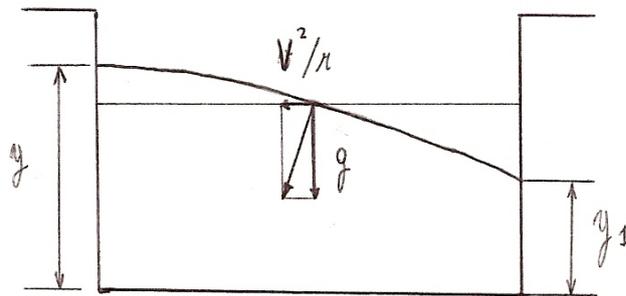


Figura 3.50: Andamento del pelo libero nella sezione trasversale di una curva circolare.

Integrando questa equazione fra i raggi  $r_1$  interno e  $r_2$  esterno della curva e le corrispondenti quote del pelo libero  $y_1$  e  $y_2$  si ha:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{c_1^2}{2g} \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \tag{3.72}$$

Essendo  $V_m$  la velocità sulla curva di raggio medio  $r_m$  e  $B = r_2 - r_1$  la larghezza del canale si ha equivalentemente:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = \frac{V_m^2 B}{g} \cdot \frac{r_m^3}{r_1^2 r_2^2} \quad (3.73)$$

### Formula di Grashof

Con buona approssimazione si può sostituire al raggio medio aritmetico quello medio geometrico, quindi  $r_m^3/r_1^2 r_2^2$  con  $1/r_m$ , e a  $V_m$  la velocità media  $\bar{V}$  nella sezione. Si ottiene in questo modo la *formula di Grashof*:

$$\Delta y \approx \frac{\bar{V}^2 B}{g r_m} \quad (3.74)$$

Essa fornisce una valutazione tecnicamente<sup>3</sup> soddisfacente del dislivello  $\Delta y$  per  $r_m/B \geq 1,5$ .

### 3.11.2 Correnti veloci

Il caso delle correnti veloci risulta notevolmente più complicato in quanto non essendo tali correnti influenzate da ciò che succede a valle la corrente “urta” violentemente contro le sponde esterne della curva, per cui si creano nel pelo libero dei sovralti che si propagano verso valle attaccati alla parete. La trattazione analitica del problema viene quindi tralasciata.

---

<sup>3</sup>Una tipica applicazione tecnica che necessita della conoscenza del dislivello del profilo trasversale è il *dimensionamento degli argini*. Questo dislivello non viene invece tenuto in considerazione nel tracciamento dei profili longitudinali del pelo libero.

## 3.12 Alvei in letti alluvionali: condizioni di stabilità

### 3.12.1 Introduzione

I corsi d'acqua naturali assumono una forma che è legata al *tipo di sedimento* presente sul fondo e sulle sponde e agli *aspetti idrologici* che si esplicano in quel corso d'acqua.

Normalmente i corsi d'acqua vengono considerati come qualcosa di fisso e stabile nel loro andamento plano-altimetrico; in realtà così non è: è evidente, ad esempio, che per riuscire a riempire di sedimenti le pianure alluvionali i corsi d'acqua devono nel tempo invadere tutta la pianura.

L'*arginazione di un corso d'acqua* equivale a fissarne l'andamento planimetrico e quindi ad impedire alluvionamenti della pianura circostante e ad imporre un *alluvionamento selettivo* della fascia interarginale. Ne consegue che col tempo il canale compreso tra gli argini maestri si alza e quindi il livello del piano campagna al suo interno diviene più alto di quello esterno. Tale innalzamento per sedimentazione riguarda soprattutto le golene.

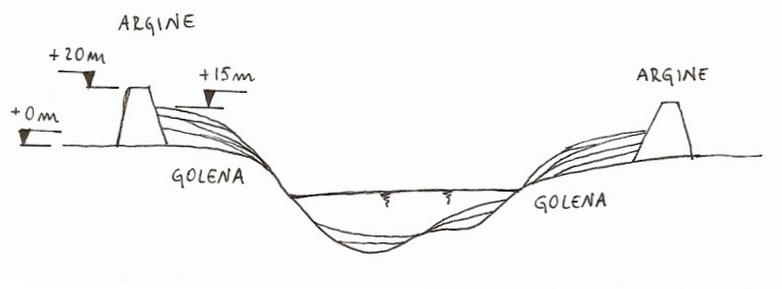


Figura 3.51: Arginazione di un corso d'acqua.

Si noti come questo tipo di dinamica fluviale non avvenga solamente alla scala dei tempi geologici (migliaia d'anni) bensì anche a quella che riguarda la vita tecnica delle opere di ingegneria fluviale (decine d'anni).

Ne consegue che l'analisi del *trasporto solido* (valutazione della portata solida e dell'inizio del trasporto al fondo) e dei *fenomeni di modellamento dell'alveo e di resistenza* siano di grande interesse ingegneristico.

### 3.12.2 Caratterizzazione del sedimento

#### Densità

Dal punto di vista idraulico la prima caratteristica distintiva dei materiali trasportati dalla corrente è la loro densità  $\rho_s$ .

#### Dimensioni

Ipotizzando di approssimare un granulo con un ellissoide, s'individuano i seguenti elementi:

- diametro *massimo*  $D_{\max}$ : corrisponde alla massima distanza tra due punti appartenenti al ciottolo;
- *sezione maestra*: corrisponde alla sezione di area massima tra tutte quelle ortogonali all'asse massimo;
- diametro *minimo*  $D_{\min}$ : è il diametro minimo tra tutti quelli appartenenti alla sezione maestra;
- diametro *medio*  $D_{\text{med}}$ : è il diametro appartenente alla sezione maestra ortogonale al diametro minimo.

La caratterizzazione di un miscuglio di granuli di varie dimensioni avviene mediante la *distribuzione granulometrica*, corrispondente alla distribuzione di probabilità dei diametri dei granuli all'interno del miscuglio.

Dal momento che la sedimentazione in un corso d'acqua non è omogenea, nel campionare i sedimenti per effettuarne l'analisi granulometrica bisogna stare molto attenti alla *rappresentatività del campione*. In funzione della dimensione dei granuli la tecnica di analisi granulometrica varia:

- ✓ limi e argille: *aerometria*;
- ✓ sabbie e ghiaie: *setacciatura* (il passaggio attraverso il setaccio è condizionato dal diametro medio della sezione maestra);
- ✓ ciottoli: *campionamento per numero alla superficie*.

La terza tecnica consiste nel misurare direttamente il diametro medio di singoli elementi lapidei campionati a caso. Il prelievo casuale di ciottoli dall'alveo avviene solitamente mediante grigliatura (gridding, quadrillage): si materializza, mediante fili e picchetti, una griglia a maglia quadrata sovrapposta al deposito alluvionale. L'apertura della maglia deve essere maggiore della dimensione massima del masso più grosso presente sul luogo del campionamento, in modo da evitare di prendere in considerazione due volte lo stesso elemento lapideo. Il numero  $N$  di nodi deve essere sufficientemente elevato: generalmente per questioni di comodità se ne considerano 100. Mediante un filo a piombo ci si pone nel nodo e si misura il masso stante sulla verticale. In generale il numero  $N'$  di diametri misurati è inferiore a quello degli  $N$  nodi in quanto capita spesso che il filo a piombo vada a cadere su sedimenti fini affioranti.

La percentuale di passante alla più piccola misura ( $D'$ ) è data da:

$$p = \frac{N - N'}{N} \cdot 100$$

La distribuzione granulometrica degli elementi misurati si ottiene con una tabella del tipo 3.2.

Tabella 3.2: Distribuzione granulometrica ottenuta mediante campionamento per numero.

$k$	$D$	% passante
1	$D_1$	$(N - 1)/N \cdot 100$
2	$D_2$	$(N - 2)/N \cdot 100$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$N'$	$D'$	$(N - N')/N \cdot 100$

Per ottenere la *distribuzione granulometrica complessiva* è necessario riscalarlo a  $p$  la curva granulometrica ottenuta per i fini.

### Velocità di caduta in acqua ferma

Strettamente connessa con la dimensione e con la densità della particella è la sua *velocità limite*  $w_s$  di caduta libera in acqua ferma. La sua espressione per sfere di diametro  $d_s$  e densità  $\rho_s$  è:

$$w_s = \frac{1}{\sqrt{C_R}} \sqrt{\frac{4}{3} \left( \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) g d_s} \quad (3.75)$$

dove:

- $C_R$ : *coefficiente di resistenza*.

### 3.12.3 Condizioni critiche: inizio del trasporto solido

I primi tentativi empirici di esprimere quantitativamente la condizione di equilibrio del materiale incoerente posto sul fondo di canali percorsi da acque torbide risalgono alla fine dell'Ottocento.

La ricerca della larghezza, della profondità e della pendenza necessaria per raggiungere una condizione in cui il deflusso di una data portata mantiene in movimento tutto il carico di materiale solido, senza deposito e senza erosione dell'alveo, richiede di associare all'*equazione del moto della corrente* altre condizioni che riguardano appunto il *fenomeno del trasporto solido* e lo *stato di equilibrio del fondo*.

La prima interpretazione teorica del fenomeno di inizio del trasporto solido si deve a *Shields* (1936).

#### Condizione critica per il fondo

L'indagine effettuata da Shields fu rivolta ad individuare la relazione che il valore  $\tau_{cr}$  della tensione al contorno  $\tau_0$ , ossia quella che provoca il primo movimento del materiale sul fondo, ha con le proprietà  $\mu$  e  $\rho$  del fluido e con le caratteristiche  $\rho_s$  e  $d_s$  dei granuli.

Si definisce *condizione critica per il fondo* l'inizio di instabilità dell'equilibrio dei sedimenti.

#### Tensione tangenziale sul fondo

Considerando un canale con pendenza  $i_f$ , con una corrente in moto uniforme ed isolando un tronco di lunghezza unitaria, si ha che:

- la resistenza agente sul fondo vale ( $p$ : perimetro bagnato):

$$\tau_0 \cdot 1 \cdot p$$

- la forza agente (peso dell'acqua proiettato lungo la direzione del moto) vale:

$$\gamma \cdot \Omega \cdot 1 \cdot \sin i_f \approx \gamma \cdot \Omega \cdot i_f$$

uguagliando i due termini si ottiene il valore della *tensione tangenziale agente sul fondo in moto uniforme*:

$$\tau_0 = \gamma \cdot R \cdot i_f \quad (3.76)$$

Nel caso di alvei a sezione rettangolare molto larga ( $R \approx y$ ):

$$\tau_0 = \gamma \cdot y \cdot i_f \quad (3.77)$$

#### Velocità di attrito

Invertendo e applicando la legge di Chézy ( $V = C\sqrt{gRi_f}$ ) si ottiene:

$$\tau_0 = \gamma y i_f = \rho g y i_f = \frac{\rho V^2}{C^2}$$

da cui si definisce la *velocità d'attrito*:

$$V^* = \frac{V}{C} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (3.78)$$

#### Formulazione di Shields: curva di instabilità

Si suppone che in *condizioni critiche* la *resistenza al moto* dei granuli di diametro  $d_s$  e peso specifico  $\gamma_s$ , che dipende linearmente dal *peso del granulo immerso* (ossia il peso proprio depurato della spinta archimedeica) ed è quindi *proporzionale* a:

$$(\gamma_s - \gamma)d_s^3$$

uguagli la *forza di trascinamento al fondo* all'inizio del trasporto:

$$C_R \tau_{cr} d_s^2$$

Sulla base delle informazioni sperimentali si può ritenere che il coefficiente  $C_R$  sia funzione, a parità di forma dei sedimenti, di un *numero tipo Reynolds* costruito con grandezze caratteristiche del moto attorno al granulo:

- velocità d'attrito  $V^*$ ;
- diametro del granulo  $d_s$ ;
- viscosità cinematica del fluido  $\nu = \mu/\rho$ .

Esso viene detto *numero di Reynolds d'attrito*:

$$Re^* = \frac{V^* d_s}{\nu} \quad (3.79)$$

Ne deriva che:

$$\frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} = f\left(\frac{V^* d_s}{\nu}\right) \quad (3.80)$$

Il legame tra  $Re^*$  ed il *parametro di stabilità*:

$$\tau^* = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma) d_s} \quad (3.81)$$

è rappresentato, in condizioni critiche, dalla *curva di instabilità di Shields*, riportata nel grafico di figura 3.52.

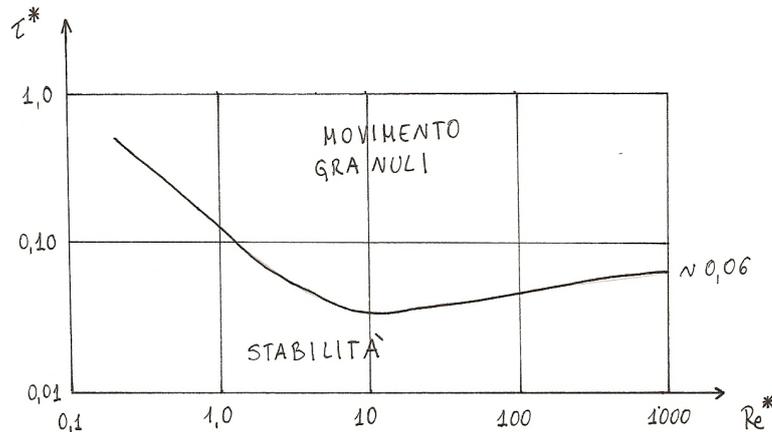


Figura 3.52: Curva di instabilità di Shields.

Tale curva è stata ricavata sulla base di numerose esperienze su materiali incoerenti di differente densità, ma sempre con *forme pseudosferiche* e con *granulometria uniforme*. Per l'applicazione ai *letti alluvionali*, dal momento che interessa principalmente che non vengano trasportati i ciottoli più grossi, si verifica la condizione di stabilità con il  $D_{80}$  della distribuzione granulometrica.

È evidente l'analogia con l'andamento delle curve che rappresentano la dipendenza funzionale del coefficiente di resistenza dal numero di Reynolds nei moti nelle condotte in pressione (diagramma di Moody). Anche in questo caso sono ben visibili *due regimi limite*:

- per bassi  $Re^*$  (fino a circa 2) le particelle restano immerse nello strato dominato dalla viscosità:

$$\tau_{cr}^* = \frac{\tau_{cr}}{(\gamma_s - \gamma) d_s} \quad (3.82)$$

è inversamente proporzionale a  $Re^*$ ;

- per alti valori di  $Re^*$  (maggiori di 300-400) la turbolenza è completamente sviluppata e  $\tau_{cr}^*$  diventa indipendente da  $Re^*$ , assestandosi su un valore pari a circa 0,06.

### 3.13 Principi di modellistica idraulica da laboratorio

Mediante i modelli da laboratorio è possibile studiare fenomeni idraulici particolarmente complessi che non sono possibili da analizzare mediante *modelli fisico-matematici*. L'applicazione principale di tali modelli è relativa alle *costruzioni idrauliche*. Il vantaggio fornito dalla riproduzione mediante *modello* di un *prototipo* deriva dalla possibilità di tenere sotto controllo tutte le *condizioni* dell'esperimento e di misurarne con una certa facilità i principali *parametri* fisici.

È evidente che nella maggior parte dei casi la riproduzione del prototipo in scala reale non è, per questioni di spazio, fattibile. Risulta inevitabile quindi la realizzazione di *modelli in scala ridotta* imponendo una determinata *scala di rapporto* tra una misura effettuata sul prototipo e la misura analoga effettuata sul modello.

#### Scala geometrica

Si definisce *scala geometrica* del modello:

$$n_L = \frac{x_P}{x_M} \quad (3.83)$$

dove:

- $x_P$ : misura di lunghezza relativa al prototipo  $[L]$ ;
- $x_M$ : misura di lunghezza relativa al modello  $[L]$ .

Risulta sempre  $n_L \geq 1$ , nel caso di uguaglianza si parla di *modelli in scala reale*.

#### Leggi e condizioni di scala

Una volta definita la scala geometrica bisogna definire le scale per le altre grandezze del modello idraulico: tempo, velocità, portata, viscosità, . . . Per poter fare ciò bisogna tenere conto di:

- *leggi di scala*: sono leggi fisiche valide sempre sia nel modello che nel prototipo; ad esempio: legge di gravitazione, legge di resistenza del moto, . . .
- *condizioni di scala*: sono condizioni che il realizzatore del modello impone; sono legate ad un giudizio di rilevanza che viene attribuito a particolari gruppi adimensionali che discendono direttamente dal teorema di Buckingham<sup>4</sup>; nel caso dei problemi idraulici si considerano:
  - numero di Froude: rapporto tra le forze inerziali ( $V$ ) e quelle gravitazionali ( $\sqrt{gy_m}$ );
  - numero di Reynolds: rapporto tra le forze inerziali ( $V$ ) e quelle viscosi ( $\nu/4R$ ).

A seconda del fatto che il fenomeno sia dominato da inerzia e gravità o da inerzia e viscosità si pone l'uguaglianza tra modello e prototipo di uno dei due numeri. Dalle considerazioni che seguono sulla derivazione di una scala risulterà evidente come la condizione di uguaglianza di entrambi i numeri sia possibile solo nel caso, molto particolare, di modelli in scala reale.

#### 3.13.1 Derivazione di una scala

Il processo di derivazione di una scala si basa su alcune leggi.

- Se una quantità è data dalla somma di due o più quantità allora la scala è data dalla somma delle scale:

$$Z = X + Y \longrightarrow n_Z = n_X + n_Y \quad (3.84)$$

<sup>4</sup>Il teorema di Buckingham o teorema  $\pi$  afferma che dato un problema descritto da un certo numero di equazioni in cui siano presenti  $n$  variabili fisiche, se le dimensioni fondamentali di queste  $n$  variabili sono  $x$ , allora il problema può essere completamente descritto da  $n - x$  variabili adimensionali. È possibile quindi studiare il medesimo problema usando un numero inferiore di variabili purché queste siano adimensionali. Adimensionalizzare un'equazione significa moltiplicare o dividere i suoi membri per variabili fisiche finché tutti i membri non diventano privi di dimensioni.

- Se una quantità è data dal prodotto di due o più quantità allora la scala è data dal prodotto delle scale:

$$Z = X \cdot Y \longrightarrow n_Z = n_X \cdot n_Y \quad (3.85)$$

Si parla di *modello distorto* quando la scala delle lunghezze in una direzione è diversa dalla scala delle lunghezze in un'altra. In questo caso non vale la regola della somma.

Deriviamo ora le scale per le due condizioni di scala viste in precedenza.

### Condizione di scala alla Froude

Supponiamo che la condizione di scala sia:

$$n_{Fr} = \frac{Fr_P}{Fr_M} = 1 \quad (3.86)$$

Ne consegue che:

$$\frac{n_V}{\sqrt{n_g \cdot n_H}} = 1$$

dove:

- $n_V$ : scala delle velocità;
- $n_g$ : scala dell'accelerazione di gravità;
- $n_H$ : scala altimetrica.

Supponendo, come è lecito fare per le applicazioni tecniche di questo tipo, che  $n_g = 1$  si ottiene:

$$n_V = \sqrt{n_H} \quad (3.87)$$

Poiché  $V = x/t$  si ha che:

$$n_V = \sqrt{n_H} = \frac{n_L}{n_t} \quad (3.88)$$

Supponendo che il modello non sia distorto ( $n_H = n_L$ ) si ottiene:

$$n_t = \sqrt{n_L} = \sqrt{n_H} = n_V \quad (3.89)$$

Per quanto riguarda la scala delle portate si ha che:

$$n_Q = \frac{n_L^3}{n_t} = n_L^{5/2} \quad (3.90)$$

### Condizione di scala alla Reynolds

Supponiamo che la condizione di scala sia:

$$n_{Re} = \frac{Re_P}{Re_M} = 1 \quad (3.91)$$

Ne consegue che:

$$\frac{n_V \cdot n_H}{n_\nu} = 1$$

Dal momento che per le applicazioni idrauliche principali si utilizza acqua<sup>5</sup>  $n_\nu = 1$  e quindi:

$$n_V = \frac{1}{n_H} \quad (3.92)$$

È evidente quindi che la condizione affinché possa valere sia la condizione alla Froude che quella alla Reynolds è che:

$$n_V = \sqrt{n_H} = \frac{1}{n_H} \longrightarrow n_H = 1 \quad (3.93)$$

e quindi che il modello sia in scala reale.

<sup>5</sup>Un esempio di modello in cui si utilizza un fluido diverso dall'acqua è il *modello di Hele-Shaw*: il moto di un sottile strato d'olio tra due lastre di vetro parallele equivale al flusso d'acqua in un mezzo poroso omogeneo ed isotropo.

### Applicazione ai modelli idraulici

Nel caso dei modelli idraulici applicati alle costruzioni idrauliche si impone la *condizione di scala alla Froude*, in quanto lo scopo principale non è quello di simulare gli effetti viscosi e di attrito (risultato ottenibile con un una condizione di scala alla Reynolds). Valgono inoltre le seguenti considerazioni:

- ✓ dal momento che il modello considera effetti localizzati se la regione non è troppo estesa le perdite di energia sono piccole;
- ✓ anche tenendo in conto le perdite di energia, dal momento che  $Re_M$  e  $Re_P$  sono noti è possibile mediante le leggi di scala correggere, ad esempio, la scabrezza di parete del modello in modo da ottenere lo stesso effetto del prototipo.

Bisogna fare attenzione quando  $Re_M < Re_P$  in quanto in tal caso lo spazio percentuale occupato dallo *strato limite* nel modello diventa maggiore di quello occupato nel prototipo.

## 3.14 Esercizi

### 3.14.1 Tracciamento di un profilo di moto permanente

Si vuole tracciare il profilo di moto permanente gradualmente variato di una corrente con portata per unità di larghezza pari a  $q = 8 \text{ m}^2/\text{s}$  che transita in un alveo a sezione rettangolare molto larga che passa da una pendenza del 4% ad una pendenza di 0,8 m/Km. Si supponga che il coefficiente di scabrezza dell'alveo secondo Gauckler-Strickler sia pari a  $K_s = 45 \text{ m}^{1/3}\text{s}^{-1}$ .

#### Svolgimento

1. Determinazione della profondità critica.

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = \sqrt[3]{\frac{8^2}{9,81}} = 1,87 \text{ m}$$

2. Determinazione delle due profondità di moto uniforme.

Alveo con pendenza del 4% (tronco di monte):

$$y_{0m} = \left( \frac{q}{K_s \sqrt{i_{fm}}} \right)^{3/5} = \left( \frac{8}{45 \sqrt{0,04}} \right)^{3/5} = 0,93 \text{ m} < 1,87 \text{ m} \implies \text{alveo a forte pendenza}$$

Alveo con pendenza di 0,8 m/Km (tronco di valle):

$$y_{0v} = \left( \frac{q}{K_s \sqrt{i_{fv}}} \right)^{3/5} = \left( \frac{8}{45 \sqrt{0,0008}} \right)^{3/5} = 3,01 \text{ m} > 1,87 \text{ m} \implies \text{alveo a debole pendenza}$$

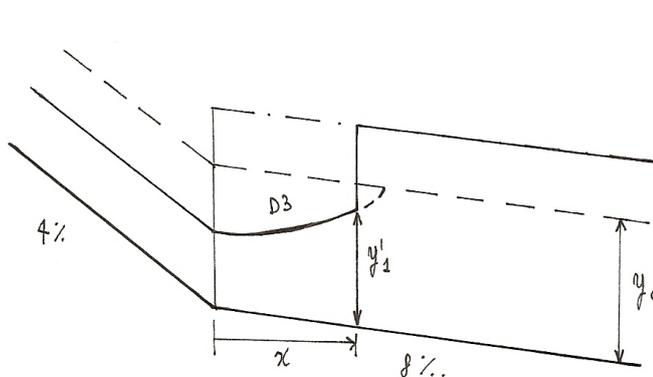
3. Valutazione delle condizioni al contorno.

Il *tronco di monte* in condizioni di moto uniforme è in corrente veloce, quindi, in assenza di condizioni specifiche, si può supporre che all'*estremo di monte* il profilo converga alla profondità di moto uniforme:  $y \equiv y_{0m}$ .

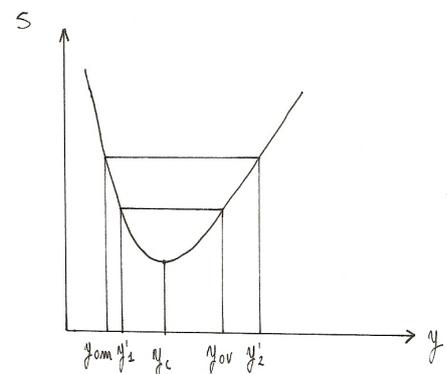
Il *tronco di valle* in condizioni di moto uniforme è in corrente lenta, quindi, in assenza di condizioni specifiche, si può supporre che all'*estremo di valle* il profilo converga alla profondità di moto uniforme:  $y \equiv y_{0v}$ .

4. Valutazione dei vincoli interni.

L'unico vincolo interno è la *variazione di pendenza* che, trasformando la corrente veloce in corrente lenta, genera un *risalto idraulico*.



(a) Profilo del moto.



(b) Spinta totale in funzione dell'altezza della corrente.

5. Determinazione della posizione del risalto.

Numero di Froude della corrente veloce di monte:

$$Fr_{0m} = \frac{q}{y_{0m}\sqrt{gy_{0m}}} = \frac{8}{0,93\sqrt{9,81 \times 0,93}} = 2,85$$

Numero di Froude della corrente lenta di valle:

$$Fr_{0v} = \frac{q}{y_{0v}\sqrt{gy_{0v}}} = \frac{8}{3,01\sqrt{9,81 \times 3,01}} = 0,49$$

Altezza coniugata dell'altezza di moto uniforme di monte:

$$y'_2 = \frac{y_{0m}}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_{0m}^2} \right] = \frac{0,93}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8 \times 2,84^2} \right] = 3,31 \text{ m} > y_{0v} = 3,01 \text{ m}$$

Altezza coniugata dell'altezza di moto uniforme di valle:

$$y'_1 = \frac{y_{0v}}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8Fr_{0v}^2} \right] = \frac{3,01}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 + 8 \times 0,49^2} \right] = 1,06 \text{ m} > y_{0m} = 0,93 \text{ m}$$

Ne risulta che  $S_2 < S_1$  e quindi che la corrente sul cambio di pendenza tende a spingere il moto uniforme lento verso valle. Poiché la corrente veloce si propaga nell'alveo a debole pendenza l'unico profilo possibile è il D3. Il risalto si forma quando l'altezza vale  $y'_1 = 1,06$  m. Per individuare la posizione del risalto idraulico basta calcolare alle differenze finite l'andamento del profilo D3 tra le altezze 0,93 m e 1,06 m, utilizzando le relazioni:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2} \qquad J = \frac{q^2}{y^{10/3}K_s^2} \qquad \Delta x = \frac{\Delta E}{i_f - \bar{J}}$$

$y$ (m)	$E$ (m)	$J$ (m/Km)	$\Delta E$ (m)	$\bar{J}$ (m/Km)	$\Delta x$ (m)	$x$ (m)
0,93	4,70	40,3				0
0,95	4,56	37,5	-0,14	38,9	3,67	3,67
1,00	4,26	31,6	-0,30	34,6	8,88	12,55
1,05	4,01	26,9	-0,25	29,3	8,77	21,32
1,06	3,96	26,0	-0,05	26,5	1,95	23,27

Si ottiene  $x = 23,27$  m.

### 3.14.2 Localizzazione di un risalto in corrispondenza di un salto di fondo

In un canale rettangolare si presenta un salto di fondo di altezza  $\delta = 1,00$  m. Con la portata per unità di larghezza  $q = 6,00$  m<sup>2</sup>/s la profondità, a valle del gradino, vale 3,50 m. Calcolare entro quali limiti può oscillare la profondità  $y_m$  della corrente a monte del gradino affinché il risalto resti localizzato in corrispondenza del gradino stesso.

Si considerano come posizioni estreme del risalto idraulico quella in cui la sua sezione iniziale coincide praticamente con la sezione del salto di fondo (caso A) e quella in cui, spostandosi il risalto verso monte, la sua sezione terminale viene a trovarsi molto vicino al gradino senza sorpassarlo (caso B). Al caso A corrisponde il limite inferiore della profondità di monte mentre al caso B il limite superiore: è evidente per quanto visto in precedenza che, nel caso di correnti veloci, un aumento della spinta verso valle si ha con una diminuzione dell'altezza della corrente a monte.

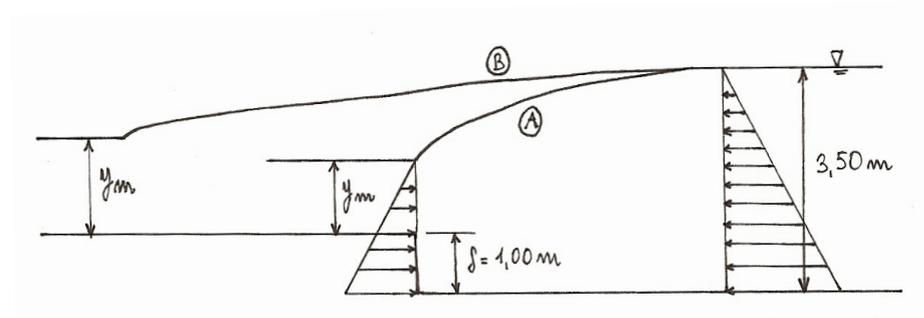


Figura 3.53: Localizzazione di un risalto in corrispondenza di un salto di fondo: caso A e caso B.

#### Caso A

Si applica al risalto l'equazione della quantità di moto, tenendo conto anche della spinta verso valle fornita dalla parete dello scalino:

$$\gamma \frac{(y_m + \delta)^2}{2} + \rho \frac{q^2}{y_m} = \gamma \frac{y_v^2}{2} + \rho \frac{q^2}{y_v} = \frac{S}{B}$$

Sostituendo i dati nell'equazione, il termine noto diventa:

$$\frac{y_v^2}{2} + \frac{q^2}{gy_v} = 7,17 \text{ m}^2$$

quindi, dall'equazione della quantità di moto divisa per  $\gamma$ :

$$\frac{(y_m + 1,00)^2}{2} + \frac{6,00^2}{9,81 \times y_m} = 7,17 \text{ m}^2$$

si ottiene:  $y_m = 0,63$  m.

#### Caso B

Dal momento che il risalto idraulico è spostato tutto a monte del gradino è come se quest'ultimo non ci fosse. Ne consegue che si può applicare direttamente l'equazione della quantità di moto come fatto per il risalto in alveo rettangolare, che equivale in ultima analisi ad applicare la relazione per la determinazione delle profondità coniugate del risalto idraulico.

Il numero di Froude nella sezione a valle vale:

$$Fr_v = \frac{q}{y_v \sqrt{gy_v}} = \frac{6,00}{2,50 \sqrt{9,81 \times 2,50}} = 0,485$$

L'altezza della corrente a monte coniugata di quella a valle vale:

$$y_m = \frac{y_v}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8Fr_v^2} \right) = \frac{2,50}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8 \times 0,485^2} \right) = 0,87 \text{ m}$$

Il risalto resta quindi localizzato sul gradino finché la profondità di monte è contenuta nel campo  $0,63 \text{ m} < y_m < 0,87 \text{ m}$ .

### 3.14.3 Calcolo della portata sfiorabile da uno stramazzo laterale

Uno sfioratore laterale sulla sponda di un canale rettangolare largo 5,0 m ha soglia lunga 8,0 m alla quota  $d = 1,30$  m sul fondo. Si vuole calcolare la portata sfiorabile in moto permanente partendo da un valore a monte  $Q_0 = 25 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  ed essendo imposta a valle l'altezza d'acqua  $y_L = 2,10$  m sul fondo.

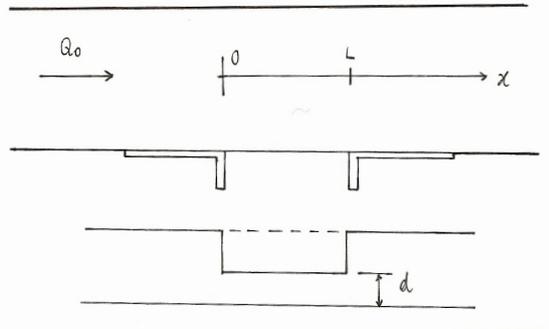


Figura 3.54: Canale con stramazzo laterale.

#### Svolgimento

In prima approssimazione, considerato che la profondità della corrente lungo lo sfioratore sarà mediamente attorno a 2 m, si valuta la portata media sfiorata per unità di lunghezza con la formula per gli stramazzi:

$$q_m = C_Q \sqrt{2g} (y_m - d)^{3/2} = 0,40 \sqrt{2 \times 9,81} \times 0,7^{3/2} = 1,0 \text{ m}^3\text{s}^{-1}/\text{m}$$

La portata finale deve risultare quindi intorno a  $Q_L = 25 - 1,0 \times 8,0 = 17 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  e ad essa corrisponde l'energia specifica:

$$E_L = 2,10 + \frac{17^2}{2 \times 9,81 \times 5^2 \times 2,10^2} = 2,234 \text{ m}$$

Si esegue quindi il calcolo del profilo con passo  $\Delta x = 1$  m utilizzando le equazioni:

$$\begin{cases} dQ(x) = -q(x) dx \\ q_u(x) = C_Q \sqrt{2g} (y - d)^{3/2} \\ E = y + Q^2(x)/2g\Omega^2 = y + Q^2(x)/2gB^2y^2 = E_L = \text{cost} \end{cases} \quad (3.94)$$

ottenute ipotizzando l'energia specifica costante lungo il tronco di canale interessato dallo stramazzo (che equivale a trascurare le perdite di carico in quel tratto), scritte nella forma:

$$\begin{cases} E = y_i + Q_i^2/2g5^2y_i^2 = 2,234 \text{ m} & (i = 0, 1, \dots, 7) \\ \Delta Q_i = q_i = C_Q \sqrt{2g} (y_i - d)^{3/2} \\ Q_{i+1} = Q_i - \Delta Q_i \end{cases}$$

e conoscendo le condizioni del moto nella sezione iniziale ( $Q_0 = 25 \text{ m}^3/\text{s}$ ). I risultati sono riportati nel quadro che segue:

$x$ (m)	$Q$ ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )	$y$ (m)	$q$ ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}/\text{m}$ )
0	25,000	1,869	0,760
1	24,240	1,903	0,829
2	23,411	1,936	0,897
3	22,514	1,967	0,965
4	21,549	1,996	1,028
5	20,521	2,024	1,091
6	19,430	2,051	1,152
7	18,277	2,076	1,210
8	17,067	2,099	-

Si constata un'ottima concordanza del valore finale dell'altezza d'acqua con il dato 2,10 m. La portata complessivamente sfiorabile risulta pari a  $25,00 - 17,07 = 7,93 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ .

**Profili del moto lungo la soglia**

Come al solito si effettua la distinzione:

- *corrente lenta*: il profilo lungo la soglia dello sfioratore è *crescente* verso valle; l'energia specifica  $E$  è data dalla corrente indisturbata di valle;
- *corrente veloce*: il profilo lungo la soglia dello sfioratore è *decescente* verso valle; l'energia specifica  $E$  è data dalla corrente indisturbata di monte.

Generalmente si evita di costruire sfioratori laterali in correnti veloci senza averle prima rallentate in quanto la diminuzione dell'altezza della corrente può essere tale da far sì che lo stramazzo non venga più alimentato e che, in presenza di una corrente lenta a valle, si formi un risalto idraulico.

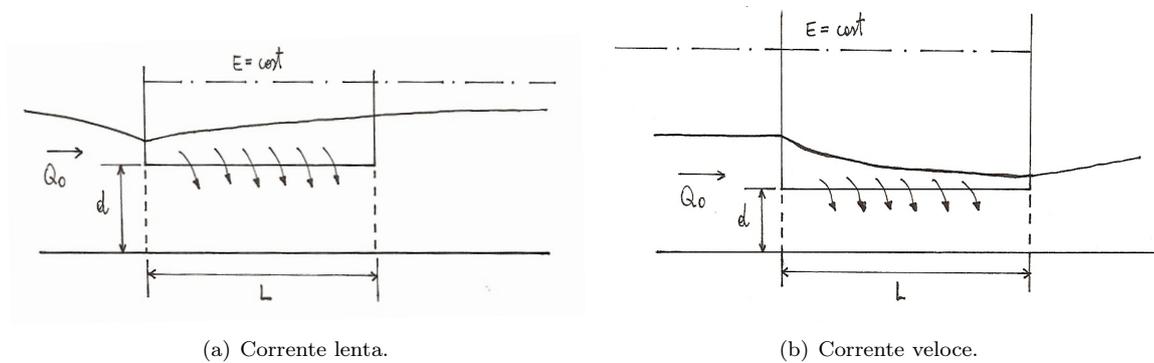


Figura 3.55: Profili di moto su uno stramazzo laterale.

**Osservazione: afflusso laterale perpendicolare alla direzione del canale**

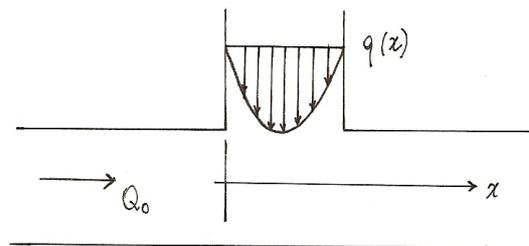


Figura 3.56: Canale con afflusso laterale.

Nel caso in cui i filetti fluidi affluenti siano perpendicolari alla direzione della corrente nel canale, la variazione di quantità di moto è notevole (grande dissipazione di energia) per cui non si può applicare la conservazione dell'energia ma bisogna ricorrere alla costanza della spinta totale:

$$S(x) = \gamma \eta_g(x) \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega} = \text{cost} \tag{3.95}$$

dove la portata è nota e varia secondo:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q(x) dx \tag{3.96}$$



# Bibliografia

- [1] Moisello U., *Idrologia tecnica*, Pavia, Edizioni La Goliardica Pavese, 1999
- [2] Soong T.T., *Fundamentals of probability and statistics for engineers*, John Wiley & Sons Ltd, 2004
- [3] Montgomery D.C., Runger G.C., *Applied statistics and probability for engineers*, III ed., John Wiley & Sons Ltd, 2003
- [4] Citrini D., Nosedà G., *Idraulica*, II ed., Milano, Casa Editrice Ambrosiana, 1987
- [5] Marchi E., Rubatta A., *Meccanica dei fluidi*, I ed., Torino, UTET, 1981

